

MEDDELANDEN  
FRÅN  
STATENS  
SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 25. 1929

MITTEILUNGEN AUS DER  
FORSTLICHEN VERSUCHS-  
ANSTALT SCHWEDENS

**25. HEFT**

REPORTS OF THE SWEDISH  
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL  
FORESTRY

**N:o 25,**

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION  
FORESTIÈRE DE SUÈDE

**N:o 25**



REDAKTÖR:  
PROFESSOR DR HENRIK HESSELMAN

## INNEHÅLL:

	Sid.
TAMM, OLOF: An Experimental Study on Clay Formation and Weathering of Felspars .....	I
En experimentell studie över lerbildning och vittring av fältspater. ....	27
TRÄGÅRDH, IVAR: Undersökningar över den större snytbaggen och dess bekämpande.....	29
Untersuchungen über den grossen Rüsselkäfer und dessen Bekämpfung. ....	88
NÄSLUND, MANFRED: Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet .....	93
Die Anzahl der Probestämme und die Genauigkeit der Höhenkurve .....	154
TRÄGÅRDH, IVAR: Om tallbocken och dess bekämpande.....	171
On the Injury of the pine-sawyer ( <i>Monochammus sutor</i> L.) and its prevention.....	219
TIRÉN, LARS: Über Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit .....	229
Om grundyteberäkning och dess noggrannhet.....	301
<b>Redogörelse för verksamheten vid Statens Skogsförsöksanstalt under år 1929.</b> (Bericht über die Tätigkeit der Forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Jahre 1929. Report on the Work of the Swedish Institute of Experimental Forestry.)	
Allmän redogörelse av HENRIK HESSELMAN .....	305
I. Skogsavdelningen (Forstliche Abteilung, Forestry division) av HENRIK PETTERSON.....	305
II. Naturvetenskapliga avdelningen (Naturwissenschaftliche Abteilung, Botanical-Geological division) av HENRIK HESSELMAN .....	311
III. Skogsentomologiska avdelningen (Forstentomologische Abteilung, Entomological division) av IVAR TRÄGÅRDH .....	312
IV. Avdelningen för föryngringsförsök i Norrland (Abteilung für die Verjüngungsversuche in Norrland, Division for Afforestation Problems in Norrland) av EDVARD WIBECK.....	314



# ANTALET PROVTRÄD OCH HÖJDKURVANS NOGGRANNHET.

## Inledning.

För all skogsuppskattning är det av grundläggande betydelse att känna den använda metodens felmöjligheter. Vid uppskattning för vetenskapliga ändamål är detta ett oavvisligt krav, och för praktiska behov är det givetvis av stort värde att kunna anpassa arbetsmetoden och därmed kostnaden efter önskad noggrannhet.

Den osäkerhet, som vidlåder uppfattningen av exempelvis kubikmassan å en försöksyta eller å provytan vid en linjetaxering, härleder dels från felkällor vid uppskattningen av det enskilda trädet, dels från bristande representativa egenskaper (höjd, form) hos provträden. Den senare felkällan minskas vid ökning av provträdsantalet och bortfaller vid individuell uppskattning av samtliga träd.

Gäller det däremot att uppskatta den typ, variationstyp, ytan representerar, erfordras teoretiskt ett oändligt antal provträd. På grund av variationens lagbundenhet och ringa storlek, blir emellertid felet i förhållande till typen redan vid ett mycket begränsat provträdsantal obetydligt. Vid uppskattningar i praktiken kan i regel felet i förhållande till variationstypen approximativt överföras att gälla uppskattningsobjektet (beståndet, skogen), vilket kommer att närmare verifieras i det följande. För försöksväsendet torde det i allmänhet vara felet med hänsyn till variationstypen, som det är av intresse att känna. Dessa förhållanden diskuteras dock lämpligen i samband med undersökningsresultaten.

För att bestämma storleken av ett fel är det nödvändigt att veta, vad som är rätt, och vi nöja oss här med att konstatera, att det rätta värdet dels kan vara den enskilda ytan, dels den typ, ytan representerar, beroende på uppskattningens ändamål.

Avsikten med föreliggande undersökning är att ge en uppfattning om det antal provträd, som erfordras vid uppskattning av försöksytor och bestånd, för att felet i kubikmassan sannolikt ej skall överskrida viss storlek, när hänsyn enbart tages till höjdkurvans osäkerhet. Systematiska höjdmättningsfel och övriga felkällor förutsättas härvid bortelimerade.

Behandlingen av detta problem är beroende av huru höjdpovträden uttagas. Detta kan ske såväl subjektivt som objektivt bland stammarna å uppskattningsytan. De objektivt utvalda povträdens många företräden ha med skärpa framhållits av professor H. PETTERSON (1926). Av dessa anför jag i detta sammanhang endast, att den objektiva metoden ger statistiskt representativa povträd, varigenom det blir möjligt, att med ledning av observationsmaterialet beräkna höjdkurvans säkerhet och anpassa antalet povträd efter behovet. Det subjektiva förfaringssättet erbjuder ej någon sådan generell beräkningsgrund. Jag förutsätter därför i det följande att povträden uttagas efter någon objektiv metod, vilket för vetenskapliga ändamål är ofrånkomligt och för praktiska behov i regel, såvida antalet ej är alltför ringa, tillförlitligast. Det objektiva provstamsvalet utgör jämte linjetaxeringens sannolikhetsteoretiska underlag grundvalen för vår stolta riksskogstaxering.

## KAP I. Allmänna riktlinjer för undersökningen.

Det ligger nära till hands att söka använda sannolikhetskalkylens matematiska apparat på problem av föreliggande art. För bestämmandet av det sannolika uppskattningsfelet i förhållande till typen finnes för övrigt ingen annan utväg att tillgripa. Då det gäller felet i förhållande till den enskilda ytan, kan visserligen en mera empirisk undersökningsmetod tänkas. Men härför erfordras ett synnerligen omfattande material, och dock skulle vi endast få en samling isolerade exempel utan möjlighet att ange en beräkningsmetod för att av observationsmaterialet i ett aktuellt fall uppskatta det sannolika felet. Det är därför av vikt att närmare undersöka sannolikhetskalkylens tillämplighet på ifrågasvarande objekt.

Innan vi övergå till en sannolikhetsteoretisk analys av materialet, skola vi diskutera några frågor av allmännare innebörd, som inställa sig, då man söker tillämpa den matematiska teorien på verkligheten.

Det har gärna velat lägga sig ett magiskt skimmer kring sannolikhetskalkylens användning på faktiska förhållanden, vilket ej heller undgått den skogliga tillämpningen. Orsaken synes mig vara lätt att finna. Vid en orientering i den rikhaltiga litteraturen på området, frapperas man genast av författarnas olika framställning av grundläggande satser och principfrågor. Vad den ene författaren framställer som en erfarenhetsats, vars tillämplighet på verkligheten är något självklart, bevisar den andre rent matematiskt under vissa på användbarheten mycket inskränkande förutsättningar.

Man måste emellertid göra klart för sig, att sannolikhetsformlerna vila på rent matematisk grund och således fordra vissa bestämda förutsätt-

ningar. Sannolikhetskalkylens matematiska del kan behandlas som en fristående teori utan förbindelse med några användningar. Detta har starkt betonats av docenten H. CRAMÉR, som lämnat en mycket klarläggande framställning av sannolikhetskalkylens grunddrag efter denna princip (CRAMÉR 1926). I regel framställs den dock i anknytning till hasardspelsteorien, som leder till uppställandet av ett visst matematiskt schema, det klassiska sannolikhettsschemat.

Särskilt då man söker tillämpa sannolikhetskalkylen på oplöjda användningsområden, till vilka de skogsbiologiska ännu måste räknas, är det av vikt att hålla isär den rent matematiska sannolikhetskalkylen och de empiriska erfarenheterna från andra tillämpningsgebit. Sannolikhetsformlerna förlora då sin mystik och framstå mot en bakgrund av klart formulerade förutsättningar, som endast med större eller mindre approximation kunna återfinnas i ett konkret material. Graden av approximation blir då avgörande för kalkylens värde.

Vid den matematiska behandlingen av praktiska problem måste vi schematisera och renodla undersökningsobjektet för att uppfylla förutsättningarna till de satser, varpå den rent teoretiska beräkningen måste grunda sig. De matematiska satserna gälla vid tillämpning på verkligheten blott inom vissa empiriskt funna gränser. Deras tillämplighet kan ej teoretiskt bevisas, utan endast empiriskt verifieras. Genom renodlingen erhålla vi en mer eller mindre abstrakt bild av verkligheten. Blir denna abstraktion så stor, att vi ej approximativt och med viss rimlig begränsning kunna överföra de gjorda beräkningarna på faktiska förhållanden, är givetvis kalkylen värdelös ur praktisk synpunkt, och problemet måste lösas på annat sätt.

De allmänna riktningarna för undersökningen böra således innehålla tre moment: statistisk analys av materialet, matematisk behandling av det renodlade materialet samt diskussion av kalkylens giltighet i det aktuella fallet. Av dessa är det första synnerligen viktigt, ty därmed måste de matematiska förutsättningarnas tillämplighet verifieras och kalkylens värde motiveras.

Sannolikhetskalkylen kan endast ge en schematisk bild av verkligheten. Det är därför nödvändigt att göra de matematiska kalkylerna på ett i högsta grad renodlat material, där de erforderliga förutsättningarna med minsta grad av approximation återfinnas. Sedan blir det en omdömesfråga att generalisera och överföra kalkylens resultat på den ursprungliga företeelsen. Insätter man ursprungsmaterialet direkt i den matematiska apparaten införs flera felkällor, och dessa äro svåra att överblicka, då matematiken arbetar blint efter givna förutsättningar.

Tab. I. Materialet.

Försöksyta eller trakt n:r	Areal Areal hektar	Bestandsform Bestandsform	Antal stammar å ytan eller trakten Stammzahl in der Fläche oder dem Bestand	Ålder Alter	Bonitet enl. Jonson Bonität nach Jonson
Yta 27:I Fläche	0,23	Tall (gran) Kiefer (Fichte)	183 (167)	50	IV
» 27:II	0,20	Tall (gran) Kiefer (Fichte)	116 (136)	50	IV
» 27:IV	0,20	Tall (gran) Kiefer (Fichte)	157 (157)	50	IV
» 27:V	0,20	Tall (gran) Kiefer (Fichte)	233 (511)	50	IV
» 27:VII	0,15	Tall (gran) Kiefer (Fichte)	150 (91)	50	IV
» Sf. 17:I	0,21	Tall 0,9, gran 0,1 Kiefer 0,9, Fichte 0,1	124 257	81	III
» » 3I	0,22	Gran (tall) Fichte (Kiefer)	210 (11)	95	IV
» » 32	0,25	Tall 0,7, gran 0,3 Kiefer 0,7, Fichte 0,3	90 250	85	III
» » 50:II	0,25	Tall Kiefer	203 —	100	VI
» » 50:III	0,20	Tall Kiefer	249 —	100	VI
» » 50:IV	0,24	Tall Kiefer	231 —	100	VI
» » 56:I	0,64	Gran (tall) Fichte (Kiefer)	593 (13)	80—135	IV
» » 56:II	0,43	Gran 0,9, tall 0,1 Fichte 0,9, Kiefer 0,1	470 36	50—85	IV
» » 60	0,25	Gran Fichte	299 —	99	V
» 253	0,25	Gran Fichte	92 —	95	II
» 349:I	0,25	Gran Fichte	209 —	57	II—(III)
Trakt 147 Bestand	3,35	Tall 0,6, gran 0,4 Kiefer 0,6, Fichte 0,4	—	95	III
» 193	6,20	Gran 0,6, tall 0,4 Fichte 0,6, Kiefer 0,4	—	100	IV
» 199	10,55	Gran 0,5, tall 0,5 (löv) Fichte 0,5, Kiefer 0,5 (Laub)	—	85	IV
» 153	2,50	Gran 0,8, tall 0,2 Fichte 0,8, Kiefer 0,2	—	100	IV—(III)
» 195	6,35	Tall 0,8, gran 0,2 (löv) Kiefer 0,8 Fichte 0,2 (Laub)	—	120	V
» 150	11,90	Tall 0,9, gran 0,1 Kiefer 0,9, Fichte 0,1	—	130	V
» 126	3,20	Tall 0,9, gran 0,1 Kiefer 0,9, Fichte 0,1	—	90	V—(IV)
» 129	2,60	Tall, gran Kiefer, Fichte	—	100	IV—(III)

Das Material.

Behandlingsform Behandlungsform	Höjdmätningar Höhenmessungen				Belägenhet Lage
	Träd- slag Baum- art	Antal Anzahl	Medel- diam. Mittlerer Durch- messer cm	Medel- höjd Mittlere Höhe m	
Stark läggallring	Tall	183	15,5	13,3	Jönåker, Södermanl.
Stärke Niederdurchforstung	Kiefer				
Extra stark läggallring	Tall	116	17,3	13,5	» »
Extra starke Niederdurchforstung	Kiefer				
Extra stark krongallring	Tall	157	14,5	11,8	» »
Extra starke Hochdurchforstung	Kiefer				
Svag krongallring	Tall	233	13,3	11,3	» »
Schwache Hochdurchforstung	Kiefer				
Stark krongallring	Tall	150	14,7	12,3	» »
Stärke Hochdurchforstung	Kiefer				
Extra stark läggallring	Tall	124	21,3	18,8	Siljansfors, Dalarna
Extra starke Niederdurchforstung	Kiefer				
Stark krongallring	Gran	210	16,2	15,8	» »
Stärke Hochdurchforstung	Fichte				
Stark krongallring	Gran	250	10,0	9,4	» »
Stärke Hochdurchforstung	Fichte				
Extra stark läggallring	Tall	203	14,9	11,6	» »
Extra starke Niederdurchforstung	Kiefer				
Orörd	Tall	249	14,8	11,9	» »
Ungerührt	Kiefer				
Extra stark krongallring	Tall	231	14,2	10,8	» »
Extra starke Hochdurchforstung	Kiefer				
Stamvis blädning	Gran	593	17,5	16,3	» »
Plenter	Fichte				
Stamvis blädning	Gran	470	15,4	14,4	» »
Plenter	Fichte				
Stark krongallring	Gran	299	14,5	14,1	» »
Stärke Hochdurchforstung	Fichte				
Stark läggallring	Gran	46	26,6	24,8	Kinne revir, Västerg.
Stärke Niederdurchforstung	Fichte				
Stark läggallring	Gran	69	19,2	18,0	Marks » »
Stärke Niederdurchforstung	Fichte				
Fri krongallring	Tall	96	—	23,4	Siljansfors, Dalarna
Freie Hochdurchforstung	Kiefer				
Fri genomhuggning	Gran	143	—	14,8	» »
Freier Durchhieb	Fichte				
Fri gallring	Gran	153	—	15,1	» »
Freie Durchforstung	Fichte				
Fri genomhuggning o. föryngringshuggning	Gran	135	—	18,3	» »
Freier Durchhieb und Verjüngungshieb	Fichte				
Fri genomhuggning	Tall	114	—	17,1	» »
Freier Durchhieb	Kiefer				
Ljushuggning	Tall	156	—	16,4	» »
Lichtung	Kiefer				
Gallring och föryngringshuggning	Tall	82	—	15,8	» »
Durchforstung und Verjüngungshieb	Kiefer				
Stark läggallring	Gran	84	—	16,1	» »
Stärke Niederdurchforstung	Fichte				



## KAP. II. Statistisk analys av materialet.

Materialet utgöres av 16 försöksytor, varav på 14 st. samtliga träd av ett trädslag höjdmäts med teodolit och på vardera av de två återstående representativa provträd uttagits efter viss kvot (vart n<sup>te</sup> träd). Dessutom har bearbetats representativa höjdprovstammar mätta med Christens höjdmätare från 8 s. k. trakter å Siljansfors försökspark. Dessa trakter äro att betrakta som bestånd av å välskötta skogar förekommande typer. Över materialet lämnas en beskrivning i tab. I.

Trädslagsblandningen har angivits på vanligt sätt i tiondelar av kubikmassan. För samtliga försöksytor och trakter med undantag av ytan sf 32 har huvudträdslaget höjdmäts. Den å ytan sf 32 höjdmätta granen ingår till c:a 80 % av stamantalet i underbeståndet — 3:dje och 4:de kronskikten.

Första förutsättningen för en matematisk behandling av höjdkurvan är en ekvation för densamma. Det är en karakteristisk olikhet mellan tallens och granens höjdkurvor i likåldriga, såväl rena som blandade bestånd och försöksytor, vilket demonstreras av fig. I. Granens höjdkurva har i regel en vändpunkt vid övergången till de starkt undertryckta diameterklasserna. För materialets ytor ligger denna punkt under 6 cm. Av 15 andra undersökta krongallrade försöksytor i åldrarna 40—90 år saknade en yta vändpunkt, och för de övriga varierade den från 2—6 cm med svag tendens att stiga högre upp i diameterskalan med stigande ålder och bättre bonitet. I blandbestånd är läget mera variabelt.

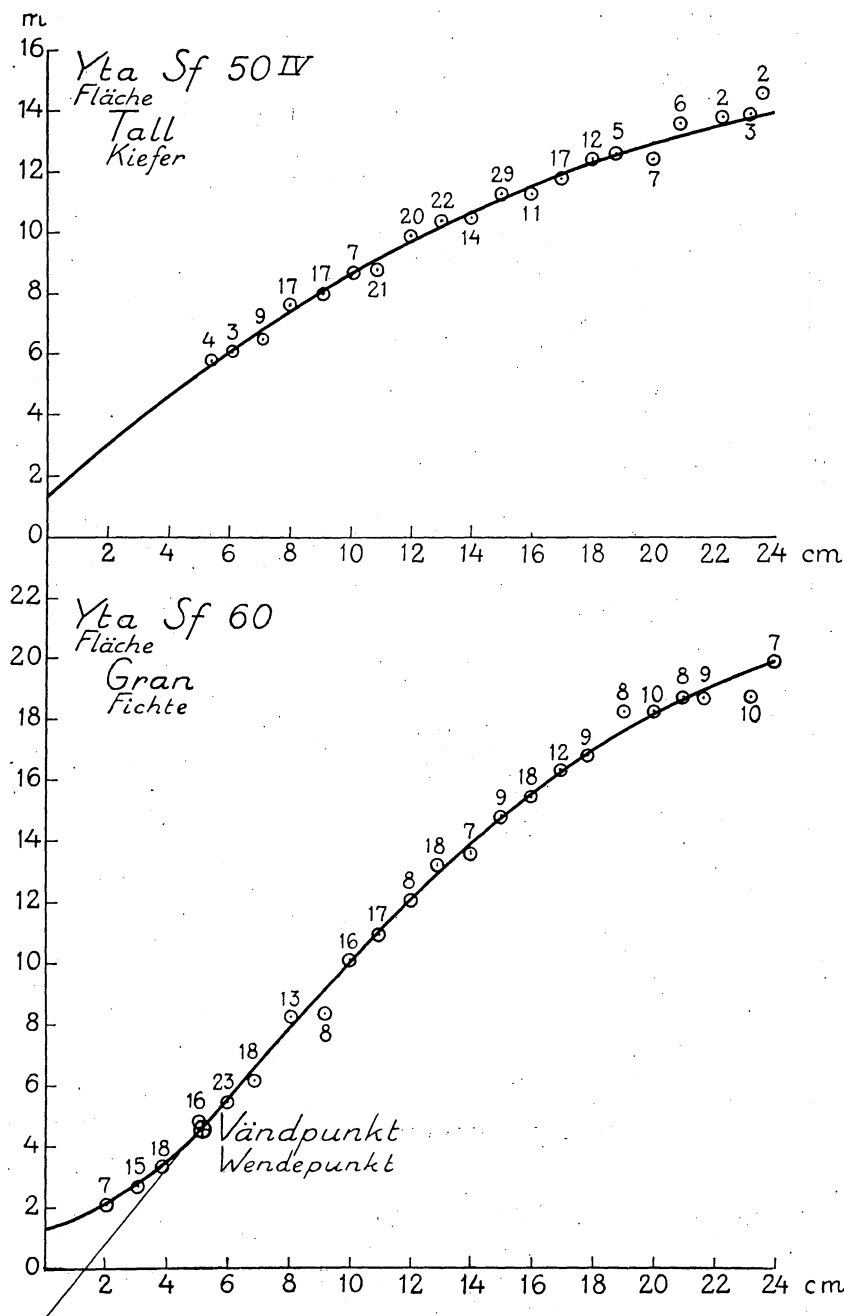
Tallens kurvor sakna egentlig vändpunkt, givetvis beroende på tallens mindre förmåga att uthärda beskuggning och mindre seghet i allmänhet i kampen för tillvaron.

Granens lägsta diameterklasser (under c:a 6 cm) visa, som kommer att framgå av det följande, andra särdrag och måste på grund därav uteslutas vid en renodling av materialet.

För tallens och, ovanför vändpunkten, även granens höjdkurvor å likåldriga försöksytor och homogena bestånd utgå vi ifrån en andra grads parabel av den allmänna formeln  $y = a + bx + cx^2$ , där  $y$  är höjden och  $x$  diametern samt  $a$ ,  $b$ ,  $c$  vissa konstanter.

Med ledning av observationsmaterialet från en viss yta kunna  $a$ ,  $b$  och  $c$  enl. minsta kvadratmetoden så bestämmas, att summan av kvadraterna på avvikelserna från den kurva, ekvationen återger, blir ett minimum.<sup>1</sup> Det återstår att visa, att ekvationen tillfredsställande återger den sökta

<sup>1</sup> För minsta kvadratmetoden redogöres närmare i kap. III.



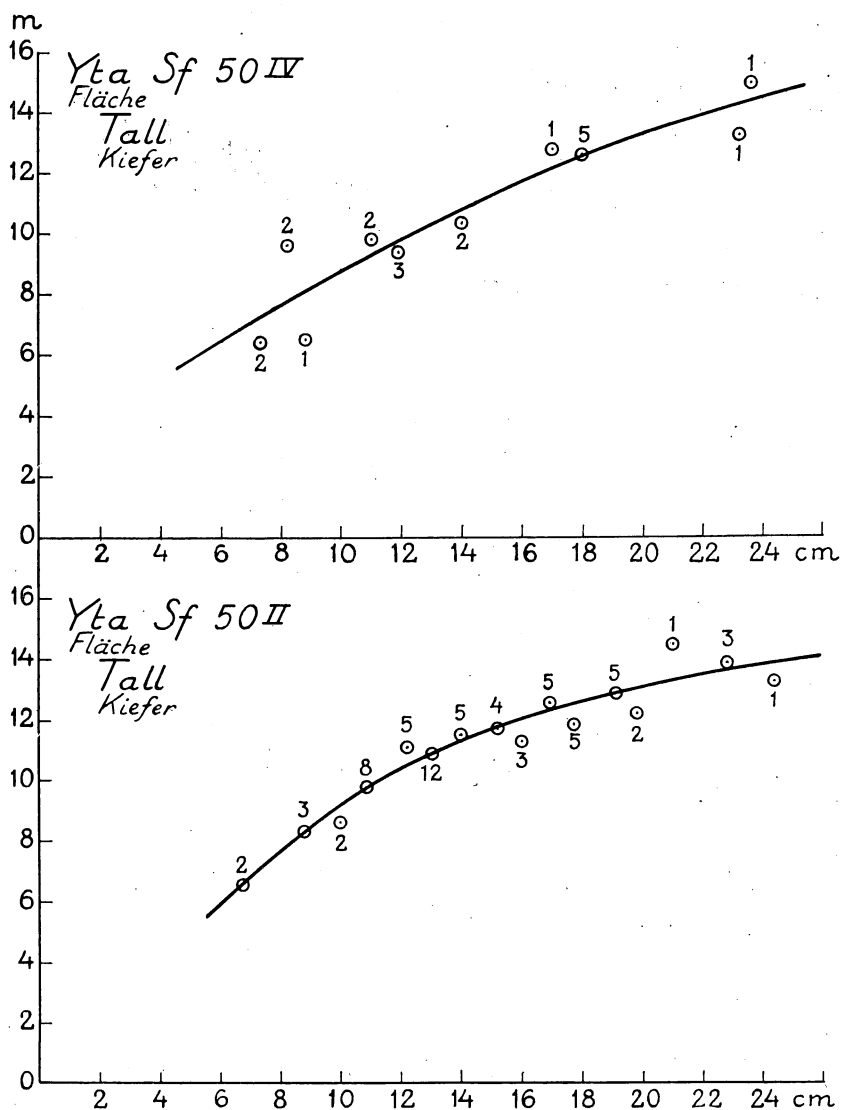


Fig. 2. Numeriskt utjämnade höjdkurvor.  
Numerisch ausgeglichene Höhenkurven.

höjdkurvan. Ett mått härpå är korrelationsindex ( $\rho$ ), som definieras av formeln (MILLS 1925):  $\rho^2 = 1 - \frac{\sigma_{sy}^2}{\sigma_{sM}^2}$ , där  $\sigma_{sy}^2$  är spridning kring kurvan,  $\sigma_{sM}^2$  spridningen kring höjdernas aritmetiska medeltal och med  $\sigma_{sy}^2$  och  $\sigma_{sM}^2$  betecknas den medelkvadratiske avvikelser.

I det följande skilja vi på spridning och medelavvikelse. Med spridning ( $\sigma_s$ ) avses ett visst materials medelavvikelse från sitt medelvärde, mätt som den medelkvadratiska avvikelsen, samt med medelavvikelse ( $\sigma$ ) variationstypens av materialet bestämda spridning. För avvikelse från en kurva bli formelerna resp.

$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N}}$  och  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N - \eta}}$ , där  $v$  är den enskilda variantens avvikelse,  $N$  antalet varianter och  $\eta$  antalet obekanta i kurvans ekvation (MILLS 1925).

Om  $\sigma_{sy}^2 = \sigma_{sM}^2$ , blir  $\rho = 0$ , d. v. s. spridningen kring kurvan är lika stor som spridningen kring det aritmetiska medeltalet och någon tendens saknas. Om  $\sigma_{sy}^2 = 0$  blir  $\rho = 1$ . Kurvan går då genom samtliga punkter — grafiskt upplagda höjdmätningar. Gränserna för  $\rho$  äro tydligen 0 och 1.

För ytorna sf 50<sup>IV</sup> och sf 60 har korrelationsindex för de enligt minsta kvadratmetoden utjämnade höjdkurvorna (fig. 1) beräknats. För gran, sf 60, har endast diameterklasserna över 6 cm utjämnats, och har den beräknade kurvans förlängning inlagts med en finare linje.

Trädantalet är resp. 231 och 243, och har varje enskilt träds avvikelse från höjdkurva och medeltal uträknats utan klassindelning. Man erhåller då:

**Sf 50<sup>IV</sup>:**  $\sigma_{sy}^2 = 199,36$ ,  $\sigma_{sM}^2 = 1137,87$  och  $\rho = 0,91 \pm 0,011$ .

**Sf 60:**  $\sigma_{sy}^2 = 415,33$ ,  $\sigma_{sM}^2 = 7013,26$  och  $\rho = 0,97 \pm 0,004$ .

De båda korrelationsindices äro ej jämförbara, emedan  $\sigma_{sM}$  varierar, men visa, att ekvationen har en synnerlig god anpassningsförmåga. (Jfr fig. 1 och 2). För  $\rho = 1$  skulle kurvan gå igenom alla punkterna.

Vid detta stora trädantal är en grafisk utjämning lätt att utföra (fig. 1), och det kan tänkas, att denna bättre förmår följa individuella beständsegenskaper hos den aktuella ytan. Dessutom är det av värde att känna den grafiska och den numeriska utjämnings verkningssätt, för att kunna överföra efter den senare metoden gjorda beräkningar att gälla även för den förra. Såväl grafisk som numerisk utjämning har därför gjorts på 4 ytor. De grafiska utjämningsarna äro benäget utförda av jägmästare PETRINI enligt gängse metod. Resultaten framgå av tabell 2. De numeriska utjämningsarna äro återgivna i fig. 1 och 2. För ytan sf 50<sup>IV</sup> har höjdkurvan utjämnats dels för alla träd och dels för 20 representativa provträd.

Vid utjämning av höjdkurvor för likåldriga försöksytor synes den numeriska utjämnings av ekv.  $y = a + bx + cx^2$  vara något överlägsen den grafiska vid stamantal, som vanligen ligga till grund för höjdkurvan, men är skillnaden ringa. Vid mycket stort stamantal har ej någon differens framkommit.

Tab. 2. Jämförelse mellan numerisk och grafisk utjämning.  
Vergleichung zwischen rechnerischer und graphischer Ausgleichung.

Y t a Fläche N:r	Antal mätta träd Anzahl gemessener Bäume	S p r i d n i n g ( $\sigma_s$ ) Streuung ( $\sigma_s$ )	
		Numerisk utjämning Rechnerische Ausgleichung	Grafisk utjämning Graphische Ausgleichung
Sf 50: IV .....	231 (alla) ... .. alle	$\pm 0,94$	$\pm 0,94$
Sf 50: IV .....	20 representativa ..... repräsentative	$\pm 1,00$	$\pm 1,03$
Sf 50: II .....	60 representativa ..... repräsentative	$\pm 0,83$	$\pm 0,85$
Sf 60 .....	243 (alla > 6 cm) ..... alle	$\pm 1,32$	$\pm 1,32$

Jag har i det följande använt en numerisk utjämning av ekv.  $y = a + bx + cx^2$  som ett tillfredsställande matematiskt uttryck för försöksytornas höjdkurvor.

Sannolikhetsskalkylen grundar sig på en lagbunden spridning — variation — hos undersökningsmaterialet kring medelvärdet eller medelkurvan. Det är därför nödvändigt att närmare studera denna spridning.

På fyra tallytor och fyra granytor har spridningen kring den numeriskt utjämnade höjdkurvan uträknats för varje 1 cm:s klass enligt formeln:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N}}, \text{ där } v \text{ är avvikelserna och } N \text{ trädantalet, samt uttryckts i abs.}$$

mått (spridning) och i % av resp. cm-klass' medelhöjd (variationskoefficient). I dessa räkningar ha medtagits samtliga träd å ytan av det undersökta trädslaget (se tab. 1). Resultatet framgår av fig. 3 och 4.

För tallen (fig. 3) är spridningen oberoende av diametern, och stiger variationskoefficienten följaktligen med sjunkande diameter. Spridningen för de allra lägsta diameterklasserna å den ogallrade ytan sf 50<sup>III</sup> visar möjligen en svag och obestämd tendens att sjunka med sjunkande diameter.

Vad gränen beträffar (fig. 4) är denna tendens utpräglad för de lägsta diameterklasserna, men från omkring 6 cm och däröver blir spridningen även här oberoende av diametern och variationskoefficienten således stigande med sjunkande diameter. Spridningens sjunkande tendens för gränens lägsta diameterklasser är ur statistisk synpunkt en viktig iakttagelse, emedan sannolikhetsteorien förutsätter, att någon tendens ej finnes.

Vid granytornas statistiska bearbetning måste därför diameterklasserna under 6 cm uteslutas. Det är givetvis viktigare att få höjdkurvans säkerhet rätt bestämd för de övriga diameterklasserna och sedan approximativt extrapolera säkerheten för de lägre, tämligen betydelselösa diameter-

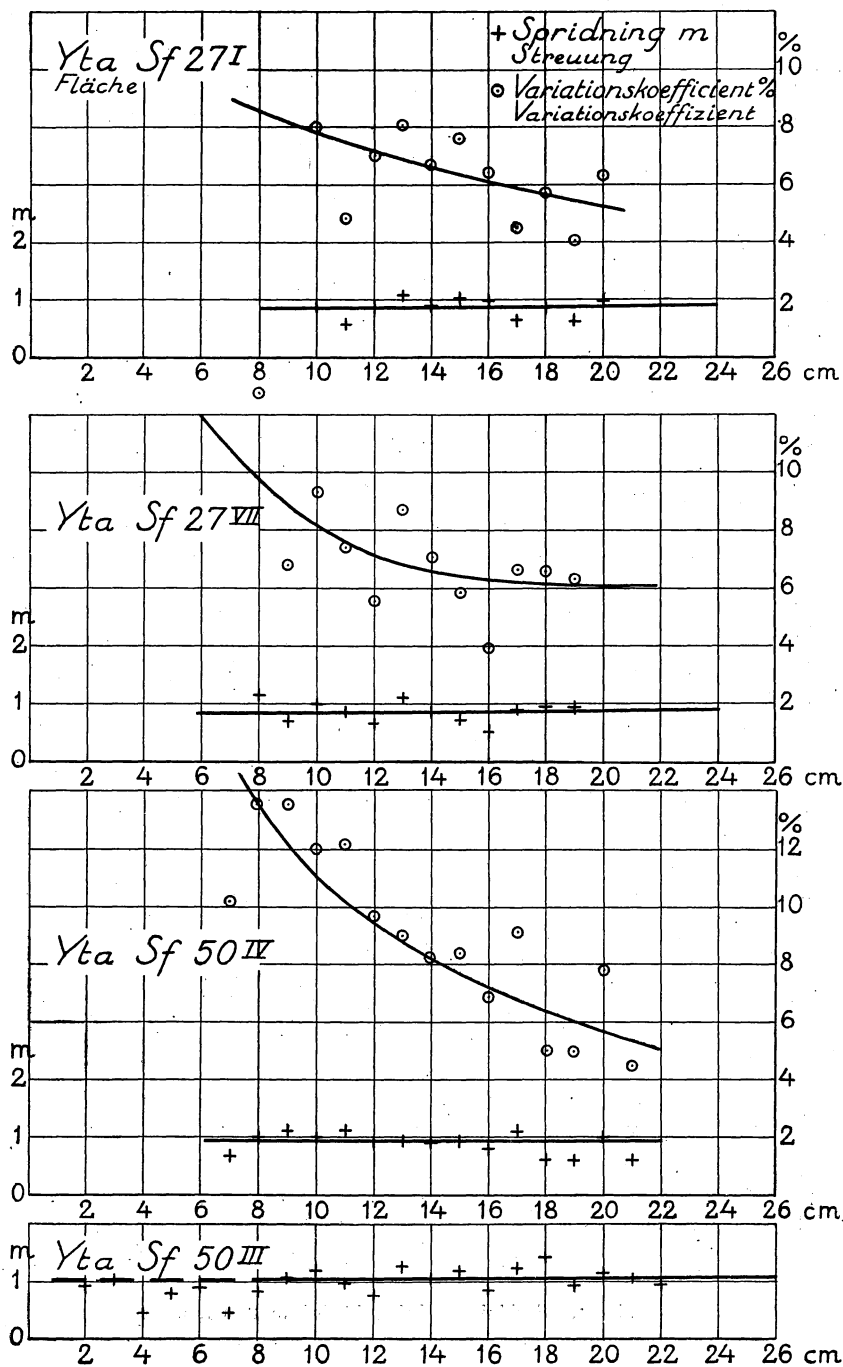


Fig. 3. Spridningen kring höjdkurvan. Tall.  
Die Streuung um die Höhenkurve. Kiefer.

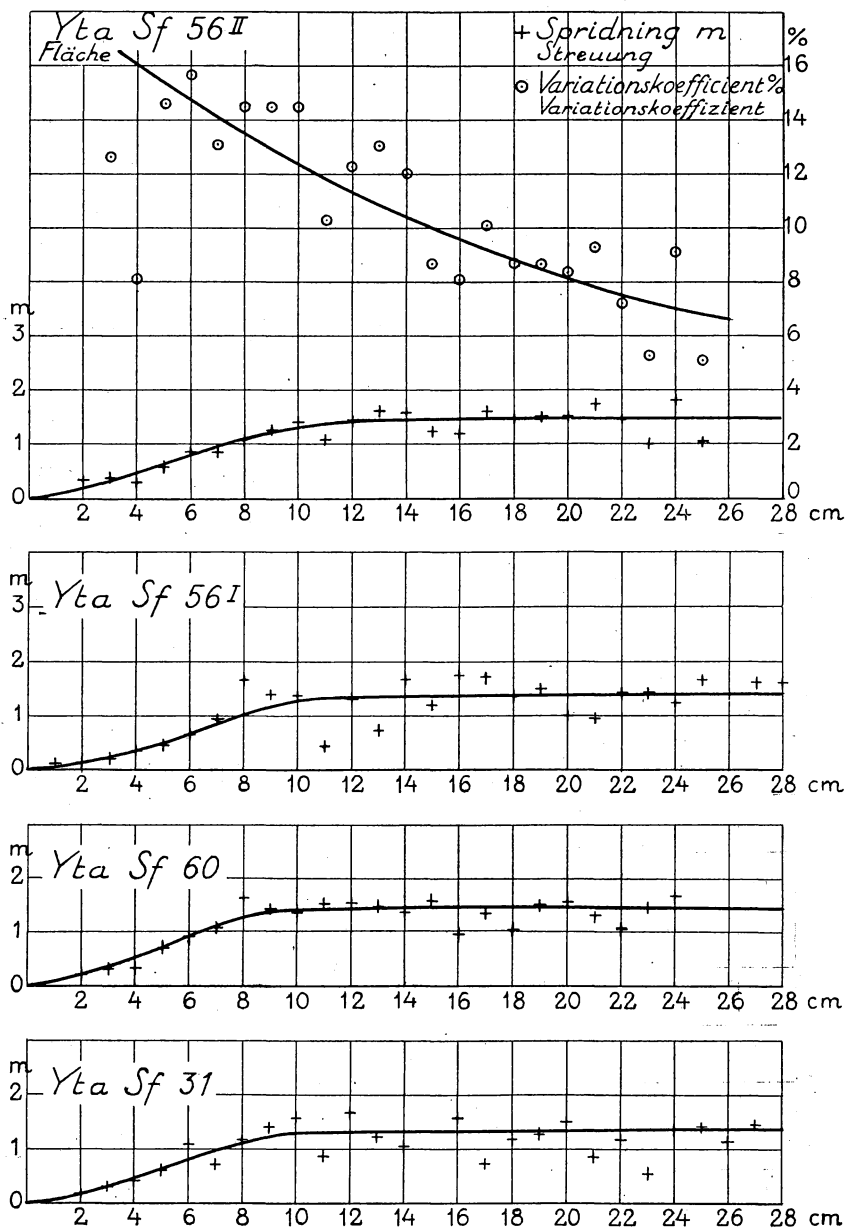


Fig. 4. Spridningen kring höjdkurvan. Gran.  
Die Streuung um die Höhenkurve. Fichte.

klasserna, än att utföra en kalkyl för hela materialet och erhålla siffror på kurvans säkerhet i olika punkter, som alla skulle vara mer eller mindre felaktiga i viss riktning.

Spridningen kring höjdkurvan har för de fyra granytorna (fig. 4) uträknats dels för alla diameterklasserna och dels endast för klasserna  $> 6$  cm, varav en sammanställning lämnas i tab. 3.

Tab. 3.

Yta Fläche  Nr	S p r i d n i n g ( $\sigma_s$ ) Streuung ( $\sigma_s$ )		Differens Differenz	
	Diam.-klasserna $> 6$ cm Durchm.-klassen	Samtliga diam.-klasser Sämtliche Durchm.-klassen	m	%
Sf. 31 .....	I,28	I,14	— 0,14	— 12
Sf. 56: I .....	I,43	I,26	— 0,17	— 14
Sf. 56: II .....	I,42	I,23	— 0,19	— 15
Sf. 60 .....	I,33	I,20	— 0,12	— 10

Härav framgår att på förra sättet blir spridningen 10—15 % för lågt bestämd i förhållande till det senare, vilket betyder samma felprocent å bestämningen av kurvans säkerhet (sid. 22). Överföres den på senare sättet beräknade medelavvikelsen att gälla diameterklasserna  $< 6$  cm, blir den tydliga för hög och överskattningens storlek beroende på tendensens styrka.

Sedan vi nu konstaterat att spridningen kring höjdkurvan är oberoende av diametern med undantag för de allra lägsta diameterklasserna, gäller det att undersöka, om fördelningen kring höjdkurvan följer någon viss sannolikhetslag — fördelningsfunktion. Detta kan ske genom jämförelse med den normala sannolikhetsfunktion — GAUSS' felfunktion — vilket utförts med ytorna: 27<sup>I</sup>, sf 50<sup>IV</sup>, sf 56<sup>II</sup> och sf 60.

Tillvägagångssättet har varit följande. Inom varje yta uträknades de enskilda stammarnas avvikelser från höjdkurvan, varvid för gran diameterklasserna  $< 6$  cm ej medtogos. Dessa avvikelser prickades sedan i klasser (pos. och neg.) med 0,3 m:s vidd. Vid jämförelse har CHARLIERS förfaringssätt använts, varvid klassernas avvikelser och frekvenser transformerades till normalkoordinater i funktionen:

$y = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  med medelav-

vikelsen ( $\sigma$ ) till enhet för  $x$  och  $y = 5 \varphi_0(x)$ , där  $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ , eller

den normala sannolikhetsfunktionen (CHARLIER 1920). Härigenom bli de olika ytorna direkt jämförbara med varandra, och genom multiplikationen med 5 kunna samma skalor användas för  $x$  och  $y$  utan att kurvan blir så flack; att mindre avvikelser från normalkurvan ej tydligt framträda.



I fig. 5 återges en jämförelse med normalkurvan för ytorna 27<sup>I</sup> och sf 56<sup>II</sup>. För samtliga fyra ytor ha dessutom medelavvikelse, excess- och asymmetrikoefficient uträknats enligt nedanstående formler och lämnas i tab. 4 en sammanställning av de erhållna värdena.

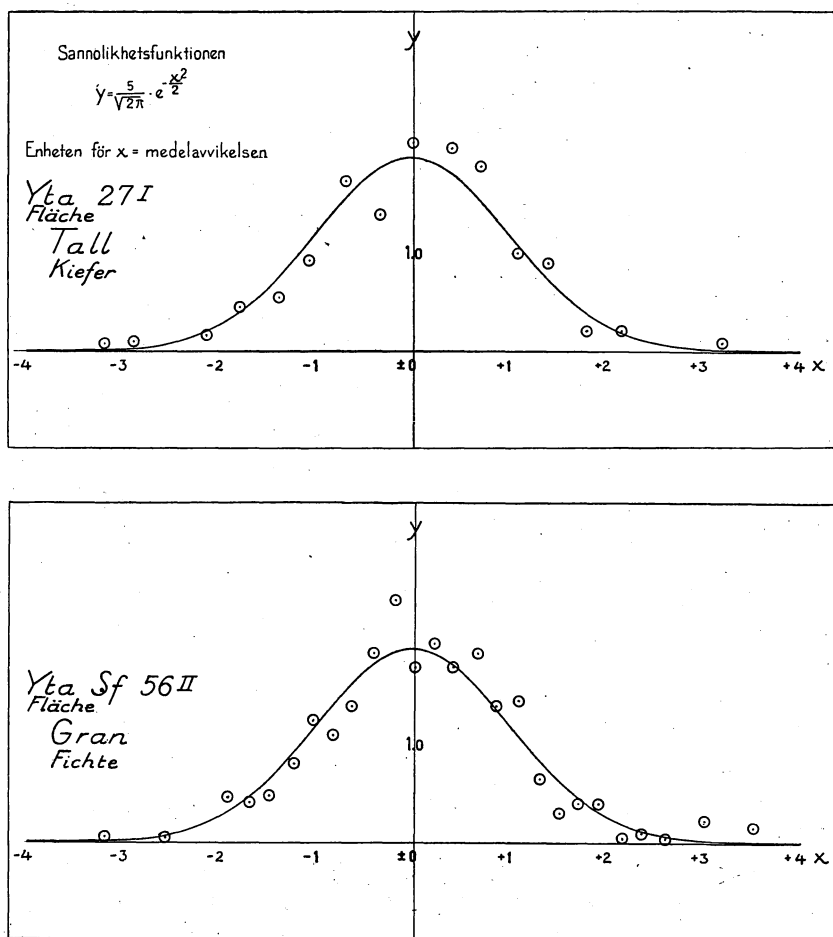


Fig. 5. Fördelningen kring höjdkurvan jämförd med den normala sannolikhetsfunktionen.

Die Verteilung um die Höhenkurve mit der normalen Wahrscheinlichkeitsfunktion verglichen.

Medelavvikelsen  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum p v^2}{N-3}}$ , där  $v$  är klassmittens avvikelse från höjdkurvan och  $p$  antalet träd i klassen samt  $N = \sum p$ .  $N-3$  emedan det är 3 obekanta i höjdkurvans ekv. En på detta sätt beräknad medelavvikelse blir tydligen något för hög, om fördelning kring höjdkurvan är

normal (fig. 5), emedan frekvensen av varianter faller från den numeriskt lägre klassgränsen till den högre. SHEPPARD har därför konstruerat en korrigeringsformel:

den korrigerade medelavvikelsen  $= \sqrt{\sigma^2 - \frac{w^2}{12}}$ , där  $w$  = klassbredden (MILLS 1925).

Vid den här använda, ringa klassbredden (0,3 m) blir denna korrektion betydelselös och har underlåtits.

Medelavvikelsens medelfel  $\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-3)}}$ .

Excesskoefficienten  $E = \frac{1}{8} \left[ \frac{\sum p v^4}{\sigma^4 \cdot N} - 3 \right]$  och dess medelfel  $\varepsilon_E = \frac{0,6124}{\sqrt{N}}$ .

Asymmetrikoefficienten  $S = \frac{\sum p v^3}{2\sigma^3 \cdot N}$  och dess medelfel  $\varepsilon_S = \frac{1,2247}{\sqrt{N}}$ .

Tab. 4. Trädens fördelning kring höjdkurvan.  
Verteilung der Bäume um die Höhenkurve.

Yta Fläche N:r	Trädslag Baumart	Antal mätta träd Anzahl gemessener Bäume	Medelavvikelse Dispersion $\sigma \pm \varepsilon_\sigma$	Excesskoefficient Excesskoeffizient $E \pm \varepsilon_E$	Asymmetrikoefficient Asymmetrikoeffizient $S \pm \varepsilon_S$
27: I ...	Tall Kiefer	183	$\pm 0,84 \pm 0,044$	$+ 0,063 \pm 0,0453$	$+ 0,006 \pm 0,0905$
Sf. 50: IV ..	Tall Kiefer	231	$\pm 0,94 \pm 0,044$	$- 0,006 \pm 0,0403$	$+ 0,050 \pm 0,0806$
Sf. 56: II ...	Gran Fichte	300	$\pm 1,42 \pm 0,058$	$+ 0,101 \pm 0,0354$	$+ 0,250 \pm 0,0707$
Sf. 60 .....	Gran Fichte	243	$\pm 1,33 \pm 0,060$	$- 0,017 \pm 0,0393$	$+ 0,065 \pm 0,0786$

Av fig. 5 och tab. 4 framgår att trädens spridning kring höjdkurvan approximativt följer den normala sannolikhetsfunktionen. Excesskoefficienten är för alla ytorna mindre än sitt maximifel ( $3\varepsilon_E$ ) och har dessutom växlande tecken. Någon excess synes därför ej föreligga. Asymmetrikoefficienten är endast på en yta (sf 56<sup>II</sup>) större än sitt maximifel ( $3\varepsilon_S$ ), men har positivt tecken för samtliga ytor, varför en tendens till positiv asymmetri torde kunna spåras (jfr LÖNNROTH, 1926). Antalet mätta träd är dock för litet, för att en mindre grad av excess eller asymmetri skulle kunna fastställas, emedan bestämningarnas medelfel bli så stora, att endast högre värden på koefficienterna ligga utanför de maximala felgränserna. Däremot ha ytorna visat frånvaro av höggradigare excess, och med ett undantag, asymmetri.

Om spridningen kring höjdkurvan exakt följer en viss fördelningsfunk-

tion, kunna vi också ange sannolikheten för en avvikelse mellan vissa bestämda gränser. För normala sannolikhetsfunktionen gäller t. ex. att:

68,27 %	av alla avvikelser (fel) ligga mellan	$+ 1 \sigma$ och $- 1 \sigma$
95,45 %	» » » » » » »	$+ 2 \sigma$ » $- 2 \sigma$
99,73 %	» » » » » » »	$+ 3 \sigma$ » $- 3 \sigma$
99,99 %	» » » » » » »	$+ 4 \sigma$ » $- 4 \sigma$

Är nu fördelningen endast approximativt normal, så blir givetvis en sannolikhetsbestämning, som förutsätter den normala funktionen, mer eller mindre osäker.

Vi ha dock alltid TCHEBYCHEFFS sats som säger, att om sannolika värdet (medelvärde) och medelavvikelsen ( $\sigma$ ) för statistisk variabel äro kända, så är sannolikheten för en avvikelse mindre än  $k$  gånger medelavvikelsen större än  $1 - \frac{1}{k^2}$  d. v. s.  $k \cdot \sigma > 1 - \frac{1}{k^2}$

(CRAMÉR 1926). Vi få alltså att:

mera än 75,0 %	av alla avvikelser ligga mellan	$+ 2 \sigma$ och $- 2 \sigma$
» » 88,9 %	» » » » » » »	$+ 3 \sigma$ » $- 3 \sigma$
» » 93,8 %	» » » » » » »	$+ 4 \sigma$ » $- 4 \sigma$
» » 96,0 %	» » » » » » »	$+ 5 \sigma$ » $- 5 \sigma$

Härav synes att medelavvikelsen (-felet) är ett gott mått på variationen eller osäkerheten i närmevärden. Vid normal fördelning ligga sålunda 99,73 % av avvikelserna mellan gränserna  $\pm 3 \sigma$ , men enligt den generellare satsen mer än 88,9 % inom  $\pm 3 \sigma$ .

### KAP. III. Höjdkurvans säkerhet.

#### Matematisk deduktion.

Vi kunna nu anse, att materialets tallytor och, med bortseende från stammarna under c:a 6 cm, granytor approximativt uppfylla följande förutsättningar, som bli utgångspunkt för den matematiska bearbetningen.

Under de växtbetingelser, som gälla i ett visst bestånd (försöksyta), antagas höjderna ( $y$ ) hos de träd, vilkas diameter vid brösthöjd har ett givet värde ( $x$ ) fördela sig efter en viss fördelningsfunktion kring ett medelvärde (höjdkurvan), som kan uttryckas genom ekv.  $y = a + bx + cx^2$ , där parametrarna  $a$ ,  $b$ ,  $c$  äro oberoende av  $x$ . Medelavvikelsen från detta medelvärde,  $\sigma$ , antages även oberoende av  $x$  (jfr fig. 1 och 2). Härvid förutsättes således  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $\sigma$  vara konstanta inom ett visst bestånd, men ej numeriskt kända.

Man har uppmätt diametrar och höjder på sammanlagt  $N$  provträd, fördelade i  $n$  klasser efter diametern  $x$ . För den  $i$ te klassen är

$$\text{antalet provträd} = p_i$$

$$\text{medeldiametern} = x_i$$

$$\text{medelhöjden} = y_i$$

Om det bortses från det obetydliga avrundningsfel, som, vid i det följande använd klassvidd (1 cm), ligger i sammanförandet av alla klassens träd till medeldiametern  $x_i$ , så är  $y_i$  att uppfatta som en statistisk variabel med medelvärde:

$$M_{y_i} = a + bx_i + cx_i^2$$

och medelavvikelsen:  $\epsilon_{y_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$ .

Ekv.  $y = a + bx + cx^2$  är höjdkurvan för den variationstyp, försöksytan representerar, och för att exakt bestämma konstanterna  $a$ ,  $b$ ,  $c$  fordras teoretiskt ett oändligt antal provträd.

Det gäller att för ett godtyckligt givet värde på  $x$  med ledning av observationsmaterialet bilda ett närmevärde på motsvarande medelhöjd  $a + bx + cx^2$  samt att uppskatta felet i detta närmevärde.

Vi sätta  $y = a + \beta x + \gamma x^2$  och beteckna därmed ekv. för den höjdkurva, som kan bestämmas med hjälp av materialet.  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  utgöra då närmevärden på de obekanta storheterna  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och skola bestämmas.

Ekvationer av formen  $y = a + \beta x + \gamma x^2$  kunna vi nu bilda lika många som antalet observationer ( $N$ ), och problemet är att av dessa bestämma parametrarna  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  med minsta möjliga medelfel. Då deras antal är större än antalet obekanta, kunna de icke alla satisfieras av något värdesystem. Man har då att söka närmevärden, vilka så nära som möjligt satisfiera ekvationerna.

Sätt  $y - y_i = v_i$ , där  $y = a + \beta x_i + \gamma x_i^2$ .

Således blir

$$v_i = a + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i \text{ och } \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [a + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i]^2.$$

Är nu fördelningen av  $v$  i överensstämmelse med normala sannolikhetsfunktion (jfr sid. 15), kan det bevisas att de sökta värdena å  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  skola göra  $\sum v^2$  till minimum (HELMERT 1907).

Vi ha sålunda:

$$\sum [a + \beta x + \gamma x^2 - y]^2 = \min.$$

Genom partiell derivering av detta uttryck med hänsyn till  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  erhålles ekvationssystemet:

$$\begin{aligned}\sum y &= a \cdot N + \beta \cdot \sum x + \gamma \cdot \sum x^2 \\ \sum xy &= a \cdot \sum x + \beta \cdot \sum x^2 + \gamma \cdot \sum x^3 \\ \sum x^2y &= a \cdot \sum x^2 + \beta \cdot \sum x^3 + \gamma \cdot \sum x^4 \quad (\text{MILLS 1925.})\end{aligned}$$

Genom att solvera dessa ekvationer, normalekvationerna, erhålla vi de sökta  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Denna utjämningsmetod har fått namnet minsta kvadratmetoden. Är materialet indelat i klasser och  $N = \sum p$  övergår tydligen  $\sum y$ ,  $\sum x \dots$  till  $\sum py$ ,  $\sum px \dots$ .

Normalekvationerna bli, redan då utgångsekvationen är av 2:dra graden, svårhanterliga. I denna undersökning har antalet erforderliga siffror i  $\sum px^4$  varierat från 11 till 14. Det har därför utbildats metoder för att förenkla och schematisera bestämningen av  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Av dessa räkne-metoder torde följande vara de allmännaste: GAUSS' metod (HELMERT 1907, JORDAN 1920), DOOLITTLE'S metod (MILLS 1925) samt determinantmetoden (JORDAN 1920, WHITTAKER and ROBINSON 1924). Den senaste metoden, som använts i denna undersökning, torde i regel vara att föredraga, och beror dess överlägsenhet på normalekvationernas goda symmetriegenskaper (axisymmetri). Ett system linjära ekvationer, som ej äro axisymmetriska, lösas enklare med GAUSS' metod.

För kännedomen om determinantmetoden och värdefulla anvisningar står jag i stor tacksamhetsskuld till docenten H. CRAMÉR.

För praktiskt behov kan visserligen ej här använda utjämningsmetod finna någon användning, men vid utjämning av kurvor för erfarenhetstabeller och vid beräkning av säkerheten hos kurvor är den av allmänare värde. På grund av den genomgående symmetrien är det nämligen lätt att överföra räkneoperationerna på ekvationer av högre grad av den allmänna formen:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \dots$$

Jag har därför ansett det lämpligt, att närmare ange de räknescemata som använts i denna undersökning, då mig veterligen någon utförligare skoglig tillämpning av här använda räknemetoder ej tidigare publicerats. TISCHENDORF har utjämnat massakurvan (med åldern som oberoende variabel) enligt GAUSS' metod för liknande ändamål (1926). Men de därvid använda medelfelsberäkningarna tillfredsställa ej föreliggande behov. Av det teoretiska underlaget, vilket grundar sig på läran om determinanter (FISCHER 1921), kan här endast medtagas, vad som erfordras för förståelsen av deduktionerna i den efterföljande framställningen. I övrigt hänvisas till anförd litteratur.

Vi införa beteckningarna

$$s_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n p_i x_i^{\mu} y_i^{\nu},$$

varvid sålunda exempelvis

$$s_{00} = \sum_{i=1}^n p_i = N; \quad s_{21} = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 y_i.$$

$s_{10}, s_{20}, s_{30} \dots$  d. v. s.  $\sum p x, \sum p x^2, \sum p x^3 \dots$  i normalekvationerna sid. 18 kunna lämpligen beräknas enligt nedanstående schema (tab. 5).

Tab. 5. Räkneschema för:  $s_{00}, s_{01}, s_{02} \dots$   
Rechenschema für:  $s_{00}, s_{01}, s_{02} \dots$

cm klass	Antal Anzahl $p$	Diam. Durchm. $x$	$px$	$px^2$	$px^3$	$px^4$	Höjd Höhe $y$	$py$	$pxy$	$px^2y$	$py^2$
	$p_1$	$x_1$	$p_1 x_1$	$p_1 x_1^2$	$p_1 x_1^3$	$p_1 x_1^4$	$y_1$	$p_1 y_1$	$p_1 x_1 y_1$	$p_1 x_1^2 y_1$	$p_1 y_1^2$
	$p_2$	$x_2$	$p_2 x_2$	$p_2 x_2^2$	$p_2 x_2^3$	$p_2 x_2^4$	$y_2$	$p_2 y_2$	$p_2 x_2 y_2$	$p_2 x_2^2 y_2$	$p_2 y_2^2$
	$p_3$	$x_3$	$p_3 x_3$	$p_3 x_3^2$	$p_3 x_3^3$	$p_3 x_3^4$	$y_3$	$p_3 y_3$	$p_3 x_3 y_3$	$p_3 x_3^2 y_3$	$p_3 y_3^2$
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$S:a$	$s_{00}$	—	$s_{10}$	$s_{20}$	$s_{30}$	$s_{40}$	—	$s_{01}$	$s_{11}$	$s_{21}$	$s_{02}$

Normalekvationerna få nu formen:

$$\left. \begin{aligned} s_{00} \alpha + s_{10} \beta + s_{20} \gamma &= s_{01} \\ s_{10} \alpha + s_{20} \beta + s_{30} \gamma &= s_{11} \\ s_{20} \alpha + s_{30} \beta + s_{40} \gamma &= s_{21} \end{aligned} \right\}$$

En av determinantteoriens viktigaste tillämpningar är lösning av system av linjära ekvationer. Med tillhjälp av determinanter skola vi solvera ovanstående ekvationssystem och beteckna dess determinant med  $\Delta$ .

$\Delta$  skrives:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix}$$

och definieras som summan av följande sex produkter med sina tecken:

$$\Delta = s_{00} s_{20} s_{40} - s_{00} s_{30}^2 + s_{10} s_{30} s_{20} - s_{10}^2 s_{40} + s_{20} s_{10} s_{30} - s_{20}^3.$$

För  $\alpha, \beta, \gamma$  få vi följande uttryck:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} s_{01} & s_{10} & s_{20} \\ s_{11} & s_{20} & s_{30} \\ s_{21} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix}$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{20} \\ s_{10} & s_{11} & s_{30} \\ s_{20} & s_{21} & s_{40} \end{vmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} s_{00} & s_{10} & s_{01} \\ s_{10} & s_{20} & s_{11} \\ s_{20} & s_{30} & s_{21} \end{vmatrix} \quad (\text{FISCHER 1921})$$

För beräkning av  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  införa vi underdeterminanten  $\Delta_{ik}$  och beteckna därmed underdeterminanten till elementet i den  $i$ te raden och  $k$ te kolonnen av  $\Delta$ , tagen med sitt tecken. Rader och kolonner ha här numererats 0, 1, 2.

Vi få då

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} s_{20} & s_{30} \\ s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = s_{20} s_{40} - s_{30}^2$$

$$\Delta_{10} = - \begin{vmatrix} s_{10} & s_{20} \\ s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = -s_{10} s_{40} + s_{20} s_{30} \text{ o. s. v.}$$

Med tillhjälp av tabell 6 kunna vi nu beräkna  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Tab. 6. Räkneschema för:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .  
Rechenschema für:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_{00} = s_{20} s_{40} - s_{30}^2$	$s_{00} \Delta_{00}$	$s_{01} \Delta_{00}$	$\Delta_{01} = s_{20} s_{30} - s_{10} s_{40}$	$s_{01} \Delta_{01}$	$\Delta_{02} = s_{10} s_{30} - s_{20}^2$	$s_{01} \Delta_{02}$
$\Delta_{10} = s_{20} s_{30} - s_{10} s_{40}$	$s_{10} \Delta_{10}$	$s_{11} \Delta_{10}$	$\Delta_{11} = s_{00} s_{40} - s_{20}^2$	$s_{11} \Delta_{11}$	$\Delta_{12} = s_{10} s_{20} - s_{00} s_{30}$	$s_{11} \Delta_{12}$
$\Delta_{20} = s_{10} s_{30} - s_{20}^2$	$s_{20} \Delta_{20}$	$s_{21} \Delta_{20}$	$\Delta_{21} = s_{10} s_{20} - s_{00} s_{30}$	$s_{21} \Delta_{21}$	$\Delta_{22} = s_{00} s_{20} - s_{10}^2$	$s_{21} \Delta_{22}$
Summa Summe	$\Delta$	$\Delta_1$	Summa Summe	$\Delta_2$	Summa Summe	$\Delta_3$
		$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}$		$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}$		$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Gången av denna uträkning är följande. Först uträknas kolumnerna 1, 4 och 6. Underdeterminanterna  $\Delta_{01}$ ,  $\Delta_{02}$  och  $\Delta_{12}$  behöva ej särskilt uträknas, emedan de äro lika med  $\Delta_{10}$ ,  $\Delta_{20}$  och  $\Delta_{21}$ . Sedan uträknas kolumnerna 2, 3, 5 och 7 samt adderas, varefter slutligen koefficienterna  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  beräknas.

Som kontroll på räkningen kan man bilda summorna:

$$s_{10} \Delta_{01} + s_{20} \Delta_{11} + s_{30} \Delta_{21}$$

och

$$s_{20} \Delta_{02} + s_{30} \Delta_{12} + s_{40} \Delta_{22},$$

vilka båda skola vara lika med  $\Delta$ .

Formeln för  $y$  kan skrivas:

$$y = a + \beta x + \gamma x^2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ s_{01} & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ s_{11} & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ s_{21} & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

Vi hava nu bestämt  $a, \beta, \gamma$  i ekv.  $y = a + \beta x + \gamma x^2$  d. v. s. höjdkurvan för en viss försöksyta. På grund av det ändliga provträdsantalet äro  $a, \beta, \gamma$  endast närmevärden för de exakta parametrarna  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  och följaktligen behäftade med vissa medelfel, som kunna beräknas (JORDAN 1920, HELMERT 1907). Dessa medelfel intressera oss ej direkt utan endast det därigenom förorsakade medelfelet i  $y$ -bestämningen för viss diameter.

Medelfelet för  $y$  kan ej direkt beräknas av medelfelen på  $a, \beta, \gamma$  enligt den vanliga formeln:  $\varepsilon_y^2 = \varepsilon_a^2 + \varepsilon_\beta^2 + \varepsilon_\gamma^2$ , medan denna förutsätter att  $a, \beta, \gamma$  äro oberoende av varandra. Ett annat tillvägagångssätt måste därför tillgripas. (HELMERT 1907).

Formel 1 för  $y$  kan skrivas:

$$y = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ \sum p_i y_i & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ \sum p_i x_i y_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ \sum p_i x_i^2 y_i & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n p_i y_i \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ 1 & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ x_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ x_i^2 & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n p_i k_i y_i, \text{ där } k_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ 1 & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ x_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ x_i^2 & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix}$$

$$k_i = -\sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 x_i^\mu x_i^\nu \Delta_{\mu\nu}$$

För medelfelet i  $y$  har man då, eftersom koefficienterna  $k_i$  äro oberoende av variablerna  $y_i$ :

$$\varepsilon_y^2 = \frac{1}{\Delta^2} \sum p_i^2 k_i^2 \varepsilon_{y_i}^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \sum p_i k_i^2$$

Efter några räkneoperationer och med stöd av kända satser om utveckling av determinanter få vi slutligen (se resumén!):

$$\sum_i p_i k_i^2 = \sum_{\mu_1=0}^2 \sum_{\mu_2=0}^2 x_i^{\mu_1+\mu_2} \Delta_{\mu_1 \mu_2} =$$

$$= \Delta [\Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01}) x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02}) x^2 +$$

$$+ (\Delta_{21} + \Delta_{12}) x^3 + \Delta_{22} x^4]$$



och alltså:

$$\varepsilon_y = \sigma \sqrt{\frac{\Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01})x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02})x^2 + (\Delta_{21} + \Delta_{12})x^3 + \Delta_{22}x^4}{\Delta}} \quad (2)$$

I denna formel för medelfelet på  $y$  ingår emellertid den obekanta storheten  $\sigma$ , medelavvikelsen.

För medelavvikelsen ha vi formeln:

$$\sigma = \sqrt{\frac{s_{02} - (\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})}{n - 3}} \dots \dots \dots (3)$$

där  $n$  är antalet klasser av inalles  $N$  träd (MILLS 1925), och  $n - 3$  emedan det är tre obekanta i ekvationen. Slutformeln för det sökta medelfelet för  $y$  blir sålunda:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{[s_{02} - (\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})] [\Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01})x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02})x^2 + (\Delta_{21} + \Delta_{12})x^3 + \Delta_{22}x^4]}{(n - 3) \Delta}} \quad (4)$$

### Tillämpning.

Vi skola nu bestämma höjdkurvans säkerhet för de olika ytorna i förhållande till den variationstyp, som de representera, och utgå närmast från det fall, att alla träd äro höjdmätta.

Det gäller då först att bestämma höjdkurvans ekvation. Med hjälp av i tabellerna 5 och 6 lämnade räknescemata ha konstanterna  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i ekvationen:  $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$  beräknats för varje yta. Härvid ha träden sammanförts i 1 cm klasser och för gran endast medtagits cm-klasserna  $> 6$  cm. Konstanterna äro sammanställda i tab. 7.

Av tabellen framgår att konstanterna  $\beta$  och  $\gamma$  genomgående äro resp. pos. och neg. Däremot är  $\alpha$  pos. för tall och neg. för gran. Det senare beroende på den i det föregående (sid. 6) omnämnda vändpunkten. De erhållna ekvationerna få givetvis ej användas utanför materialets gränser. I fig. 1 äro ekvationerna för ytorna sf 50<sup>IV</sup> och sf 60 grafiskt återgivna.

Formeln för medelfelet på  $y$  (2) innehåller medelavvikelsen ( $\sigma$ ). Denna kan bestämmas enligt formel 3, men här ingår differensen  $s_{02} - (\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})$ , som hos föreliggande material är mycket liten i förhållande till de stora talen  $s_{02}$  och  $(\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})$ . De siffermässiga avrundningsfelen få ett mycket stort inflytande på differensen. Medelavvikelsen har därför beräknats enligt formeln:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N - 3}}$ , där  $v$  är differensen mellan den observerade höjden och det beräknade medelvär-

Tab. 7. Konstanterna  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\gamma$ . Samtliga träd höjdmätta.

 Die Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  Sämtliche Bäume Höhengemessen.

Ytans Fläche Nr	Höjdmätt trädslag Höhengemessene Baumart	Variationsvidd i diameter vid brh Variationsweite in Brusthöhendurchm. cm	Konstanterna Die Konstanten		
			$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
27: I	Tall Kiefer	8—24	+ 4,275	+ 0,7681	— 0,01204
27: II	Tall Kiefer	13—23	+ 5,260	+ 0,5773	— 0,00593
27: IV	Tall Kiefer	6—23	+ 3,052	+ 0,7364	— 0,00907
27: V	Tall Kiefer	5—23	+ 2,907	+ 0,7576	— 0,00988
27: VII	Tall Kiefer	6—22	+ 4,830	+ 0,5752	— 0,00454
Sf 17: I	Tall Kiefer	11—32	+ 1,056	+ 1,2822	— 0,02099
» 31	Gran Fichte	7—33	— 2,240	+ 1,3920	— 0,01790
» 32	Gran Fichte	7—35	— 1,236	+ 1,1786	— 0,00935
» 50: II	Tall Kiefer	5—29	+ 1,117	+ 0,9835	— 0,01871
» 50: III	Tall Kiefer	1—28	+ 0,964	+ 0,9961	— 0,01724
» 50: IV	Tall Kiefer	5—27	+ 1,449	+ 0,8534	— 0,01385
» 56: I	Gran Fichte	7—40	— 1,335	+ 1,2730	— 0,01586
» 56: II	Gran Fichte	7—33	— 1,363	+ 1,2706	— 0,01607
» 60	Gran Fichte	7—37	— 1,718	+ 1,3908	— 0,02041

det för höjden,  $a + \beta x_i + \gamma x_i^2$  samt  $N$  antalet träd. För erhållande av differensen har ekvationen:  $y = a + \beta x + \gamma x^2$  upplagts grafiskt i stor skala och varje träds avvikelse avlästs. De olika ytornas medelavvikelser återfinnas i tab. 8 uttryckta i såväl m som i % av resp. ytas medelhöjd. I dessa medelavvikelser ingå även de tillfälliga teodolitmätningensfehlen, varför den biologiska avvikelserna är något lägre. Med medelhöjd avses här och i det följande medeldiameters höjd å höjdkurvan.

Medelavvikelsen hos de undersökta försöksytorna varierar för tall mellan 0,80—1,11 m och i procent av medelhöjden mellan 5,9—8,8 %, för gran äro motsvarande siffror 0,99—1,43 m och 4,8—9,0 %. För jämförelser mellan de båda trädslagen under i övrigt likartade förhållanden är materialet av för ringa omfattning. Den låga medelavvikelsen för ytorna 253 och 349<sup>I</sup> förklaras av deras egenskap av kulturskog. Någon mera avsevärd differens torde dock ej föreligga mellan tall och gran.

Tab. 8. Medelavvikelsen ( $\sigma$ ) samt medelhöjdens medel-  
Die Dispersion ( $\sigma$ ) und der mittlere Fehler der mittleren

Y t a Fläche N:r	Höjdmätt träds- lag Höhengemessene Baumart	Ålder Alter	Bonitet enl. JONSON Bonität nach JONSON	Behandlingsform Behandlungsform
27: I .....	Tall Kiefer	50	IV	Stark läggallring Starke Niederdurchforstung
27: II .....	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark läggallring Extra starke Niederdurchforstung
27: IV .....	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung
27: V .....	Tall Kiefer	50	IV	Svag krongallring Schwache Hochdurchforstung
27: VII.....	Tall Kiefer	50	IV	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung
Sf 17: I .....	Tall Kiefer	81	III	Extra stark läggallring Extra starke Niederdurchforstung
» 31 .....	Gran Fichte	95	IV	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung
» 32 .....	Gran Fichte	85	III	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung
» 50: II .....	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark läggallring Extra starke Niederdurchforstung
» 50: III .....	Tall Kiefer	100	VI	Orörd Ungerührt
» 50: IV .....	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung
» 56: I .....	Gran Fichte	80—135	IV	Stamvis blädning Plenter
» 56: II .....	Gran Fichte	50—85	IV	Stamvis blädning Plenter
» 60 .....	Gran Fichte	99	V	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung
253 .....	Gran Fichte	95	II	Stark läggallring Starke Niederdurchforstung
349: I .....	Gran Fichte	57	II—(III)	Stark läggallring Starke Niederdurchforstung

Enligt det föregående är spridningen kring höjdkurvan med undantag för granens lägsta diameterklasser oberoende av diametern. Härav följer, att den absoluta medelavvikelsen är oberoende av behandlingsformen. Däremot är den procentuella medelavvikelsen beroende av behandlingsformen, på grund av dennas inverkan på medelhöjden. Kron-gallring måste därför under likartade förhållanden ge större procentuell medelavvikelse än läggallring, vilket även framgår av tab. 8. Uttryckes medelavvikelsen i procent av exempelvis första kronskiktets medelhöjd (enl. SCHOTTES skiktindelning), bör den för behandlingsformerna kron-gallring och läggallring bliva mera konstant:

fel ( $\varepsilon_y$ ). Samtliga träd å försöksytorna höjdmätta.  
Höhe ( $\varepsilon_y$ ) Sämtliche Bäume in den Versuchsflächen gemessen.

Antal träd Anzahl Bäume	Medelhöjd Mittlere Höhe m	Medelavvikelse Dispersion $\sigma \pm \varepsilon (\sigma)$		Medelhöjdens medelfel ( $\varepsilon_y$ ) Der mittlere Fehler der mittleren Höhe ( $\varepsilon_y$ )	
		m	%	m	%
183	13,3	$\pm 0,84 \pm 0,044$	$\pm 6,3 \pm 0,33$	$\pm 0,079$	$\pm 0,59$
116	13,5	$\pm 0,82 \pm 0,055$	$\pm 6,1 \pm 0,41$	$\pm 0,094$	$\pm 0,70$
157	11,8	$\pm 0,80 \pm 0,046$	$\pm 6,8 \pm 0,39$	$\pm 0,082$	$\pm 0,69$
233	11,3	$\pm 0,92 \pm 0,043$	$\pm 8,1 \pm 0,38$	$\pm 0,078$	$\pm 0,69$
150	12,3	$\pm 0,84 \pm 0,047$	$\pm 6,8 \pm 0,38$	$\pm 0,090$	$\pm 0,73$
124	18,8	$\pm 1,11 \pm 0,071$	$\pm 5,9 \pm 0,38$	$\pm 0,123$	$\pm 0,65$
160	17,4	$\pm 1,28 \pm 0,072$	$\pm 7,4 \pm 0,41$	$\pm 0,141$	$\pm 0,81$
177	11,1	$\pm 0,99 \pm 0,053$	$\pm 8,9 \pm 0,48$	$\pm 0,096$	$\pm 0,86$
203	11,6	$\pm 0,89 \pm 0,045$	$\pm 7,7 \pm 0,39$	$\pm 0,077$	$\pm 0,66$
249	11,9	$\pm 1,05 \pm 0,047$	$\pm 8,8 \pm 0,39$	$\pm 0,085$	$\pm 0,71$
231	10,8	$\pm 0,94 \pm 0,044$	$\pm 8,7 \pm 0,41$	$\pm 0,078$	$\pm 0,73$
463	17,9	$\pm 1,43 \pm 0,047$	$\pm 8,0 \pm 0,26$	$\pm 0,090$	$\pm 0,50$
367	15,8	$\pm 1,42 \pm 0,058$	$\pm 9,0 \pm 0,37$	$\pm 0,103$	$\pm 0,65$
243	15,3	$\pm 1,33 \pm 0,060$	$\pm 8,7 \pm 0,39$	$\pm 0,116$	$\pm 0,76$
46	24,8	$\pm 1,18 \pm 0,127$	$\pm 4,8 \pm 0,51$	$\pm 0,233$	$\pm 0,94$
69	18,0	$\pm 0,95 \pm 0,083$	$\pm 5,3 \pm 0,46$	$\pm 0,149$	$\pm 0,83$

Sambandet mellan den procentuella medelavvikelsen och medelhöjden vid viss behandlingsform har närmare undersökts. Medelavvikelsen från den grafiska höjdkurvan har uträknats för 10 andra, starkt låggallrade försöksytor av tall och jämte materialets tallytor med samma behandling upplagts grafiskt (fig. 6). Provträdsantalet för de förra ytorna är rätt stort 50—75, varför de olika utjämningsmetoderna ej böra inverka nämnvärt på jämförelsen (jfr sid. 10). Siffrorna vid ordinatorna ange åldern.

Av fig. 6 framgår, att den procentuella medelavvikelsen sjunker med stigande medelhöjd till omkring 15 m för att sedan bli

konstant (5—6 %). En tendens till avtagande medelavvikelse med sjunkande bonitet kan även spåras.

Formeln för medelfelet på höjden ( $\epsilon_y$ ) för diametern  $x$  kan skrivas:  $\epsilon_y = \sigma \cdot R_x$ , där

$$R_x = \sqrt{\frac{\Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01})x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02})x^2 + (\Delta_{21} + \Delta_{12})x^3 + \Delta_{22}x^4}{\Delta}}$$

eller

$$R^2 = \frac{\Delta_{00}}{\Delta} + \frac{\Delta_{10} + \Delta_{01}}{\Delta} x + \frac{\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02}}{\Delta} x^2 + \frac{\Delta_{21} + \Delta_{12}}{\Delta} x^3 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} x^4.$$

(Jfr formel 2.)

Medelavvikelse  
Dispersion  
%

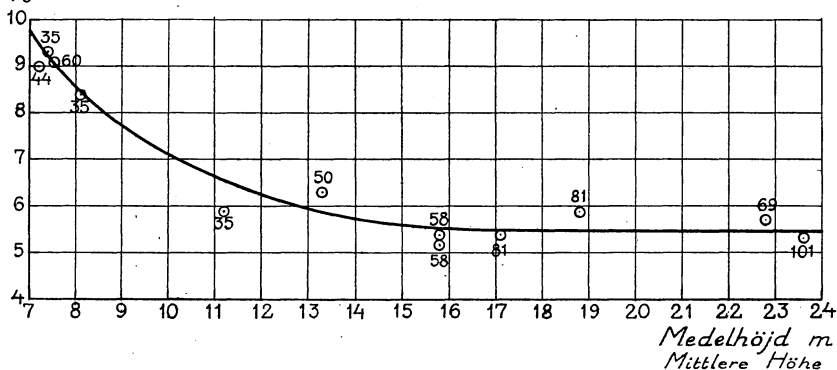


Fig. 6. Sambandet mellan medelhöjd och medelavvikelse. Medelavvikelsen är uttryckt i procent av medelhöjden. Siffrorna vid de observerade värdena ange försöksytornas åldrar.

Die Beziehung zwischen mittlerer Höhe und Dispersion. Die Dispersion ist in Prozent von der mittleren Höhe ausgedrückt. Die Ziffern bei den beobachteten Werten bezeichnen die Alter der Versuchsflächen.

Determinanten  $\Delta$  samt underdeterminanterna  $\Delta_{00}, \Delta_{10} \dots$  o. s. v. bildas av talen  $p_i$  och  $x_i$  (tabellerna 5 och 6). Koefficienten  $R_x$  blir tydligen för en viss diameter ( $x$ ) endast beroende på provträdens antal ( $p_i$ ) och fördelning på diameterklasser samt den valda klassindelningen ( $x_i$ ). För ett givet provstamsuttag ( $p_i$  och  $x_i$ ) på en viss yta ( $\sigma$ ) bli därför talen  $\frac{\Delta_{00}}{\Delta}, \frac{\Delta_{10} + \Delta_{01}}{\Delta} \dots$  i uttrycket för  $R^2$  vissa konstanter och medelfelet ( $\epsilon_y$ ) således endast en funktion av diametern ( $x$ ). Ändras provstammarnas antal eller fördelning eller båda delarna, ändras också konstanterna i uttrycket och därmed också medelfelet ( $\epsilon_y$ ).

Detta demonstreras av fig. 7. På samma yta (sf 50<sup>IV</sup>) ha 60 provträd

uttagits på tre olika sätt: 1) 60 st. efter viss kvot (vart 4:de träd), 2) 50 st. efter viss kvot (vart 5:te träd) och därtill de 10 grövsta, 3) 60 st. efter tre olika kvoter, så att 15 träd representera 25 % av kubikmassan från lägsta dimension, 30 träd för intervallet 25—75 % och 15 träd för intervallet 75—100 %. Ett detaljstudium av fig. 7 visar att  $R$  synnerligen noggrannt följer förändringarna i provstammarnas fördelning: ökas deras antal för visst diameterintervall minskas  $R$  o. s. v. (Jfr även fig. 10.)

Enligt formel 2 har medelfelet ( $\epsilon_y$ ) på medeldiameterns höjd bestämts för de olika ytorna och uttryckts i såväl m som i % av medelhöjden (tab. 8). I denna bestämning ingå samtliga träd å ytorna (und. ytorna

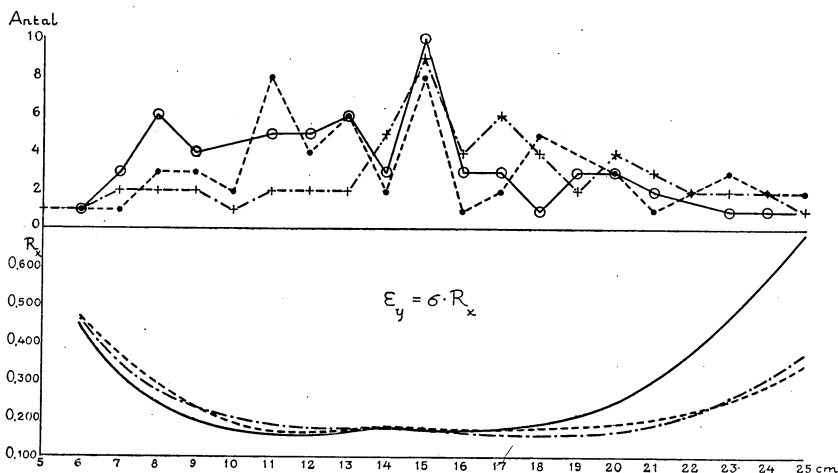


Fig. 7.  $R_x$  vid olika fördelning av provträden (Sf 50IV).

$R_x$  bei verschiedener Verteilung der Probestämme.

— 60 repr. provträd (vart n:te träd).

50 repr. Probestämme (jeder n:te Baum).

--- 50 repr. provträd och därtill de 10 grövsta träden.

50 repr. Probestämme und dazu die 10 stärksten Bäume.

- · - · - 60 provträd fördelade efter 3 kvoter och i förhållande till försöksytans kubikmassa.

60 Probestämme nach 3 Quoten und im Verhältnis zu der Masse der Versuchsfläche verteilt.

253 och 349<sup>1</sup>), och hänför sig medelfelet till den variationstyp ytan representerar. Betydelsen härav diskuteras i det följande (sid. 51 och 58).

De olika ytornas medelfel äro ej jämförbara med varandra utan endast konkreta exempel, som ligga till grund för den efterföljande deduktionen. Medelfelet varierar mellan 0,077—0,141 m eller i procent av medelhöjden 0,50—0,86 % (und. ytorna 253 och 349<sup>1</sup>).

På samma sätt kan medelfelet på höjden beräknas för vilken diameter som helst, men är det dessförinnan lämpligt behandla stamfördelningen.

#### KAP. IV. Stamantalet och kubikmassans fördelning i homogena, likåldriga bestånd.

Höjdkurvas säkerhet är enligt det föregående (sid. 26) även beroende av provträdens fördelning. Vid provträdstagning efter en viss konstant kvot blir denna, såvida antalet ej är alltför ringa, approximativt lika med stamfördelningen i beståndet. För behandlingen av frågan om provträdens effektiva uttagande är det därjämte nödvändigt känna kubikmassans fördelning.

Efterföljande framställning av stamantalet och kubikmassans fördelning får endast betraktas som en teoretisk orientering och för praktisk användning tillrättaläggning av problemet.

Fördelningen är beroende av träds slag, ålder, bonitet och behandlingsform. Ålderns och bonitetens inverkan på stamfördelningen ha tidigare mera ingående studerats av CAJANUS (1914) i Schweiziska försöksanstaltens svagt gallrade granytor och av LÖNNROTH (1926) i orörda tallbestånd. Beträffande boniteten äro resultaten samstämmade och visa att asymmetrien, som är negativ, tilltager med sjunkande bonitet samt att excessen i yngre åldrar tilltager i positiv riktning med sjunkande bonitet men i motsatt led för äldre bestånd, vilket närmare preciserats av LÖNNROTH. HAGELBERGS bearbetning av försöksanstaltens svagt låggallrade tallytor med hänsyn till kubikmassans fördelning visar ett bonitetsinflytande i samma riktning (1918).

Av åldern fann CAJANUS såväl asymmetri som excess ej i märkbar grad beroende. För LÖNNROTHS orörda tallbestånd däremot kulminerar asymmetrien vid 30—40 år för att sedan avtaga, och detsamma är även, ehuru mindre framträdande, fallet med excessen i yngre bestånd, men för äldre blir den konstant. Skillnaden mellan CAJANUS och LÖNNROTHS resultat torde i någon mån bero på de orörda beståndens självgallring. Men även för HAGELBERGS svagt låggallrade tallytor spåras ett svagt åldersinflytande varför, åtminstone för svagare huggningsformer, fördelningen i någon grad synes även bero av åldern.

Av behandlingsform och träds slag kunna stamantalets och kubikmassans fördelning a priori förutsättas beroende.

Jag har närmare undersökt denna fördelning å 36 av försöksanstaltens försöksytor lika fördelade på tall och gran samt för tall på ljushuggning och stark krongallring, för gran på stark låggallring och stark krongallring. För vardera av de fyra kombinationerna ha 9 ytor behandlats och ungefär lika fördelade på bonitetsklasserna I—II, III—IV, V—VI samt åldersklasserna 50—70, 71—90 och 91—110 år. Dessutom ha för jäm-

förelses skull medtagits två stamvis blådade granytor av bon. III och åldern i—190 år. Bearbetningen har skett enligt av HAGELBERG använd metod, varvid procent stamantal eller kubikmassa grafiskt utjämnats i form av en summationskurva med relativdiametern, uttryckt i medel-

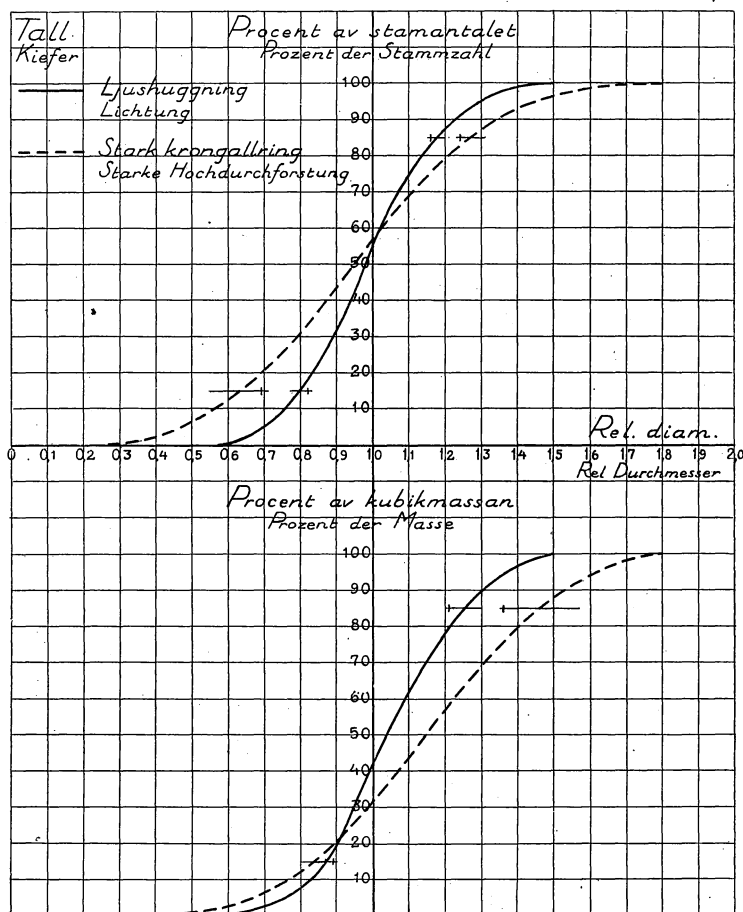


Fig. 8. Stamantalets och kubikmassans fördelning kring medeldiametern (rel. diam. 1,0). Tall.

Die Verteilung der Stammzahl und der Masse um den mittleren Durchmesser (rel. Durchm. 1,0). Kiefer.

diametern (medelgrundytans diameter) som enhet, till abscissa (fig. 8 och 9). Den procent av exv. stamantalet, som ligger under viss rel. diameter kan således avläsas. Spridningen kring de utjämnade kurvorna är rätt stor och har variationsvidden för 15 och 85 % markerats med ett tvärstreck. Någon bestämd tendens med avseende på ålderns inverkan har



ej konstaterats, vilket torde förklaras av frånvaron av yngre åldrar och svagare huggningsformer samt materialets tämligen ringa omfattning. Boniteten däremot visar en tydlig tendens, som verifierar de tidigare undersökningarnas resultat. Kurvorna återge därför närmast medelboniteten

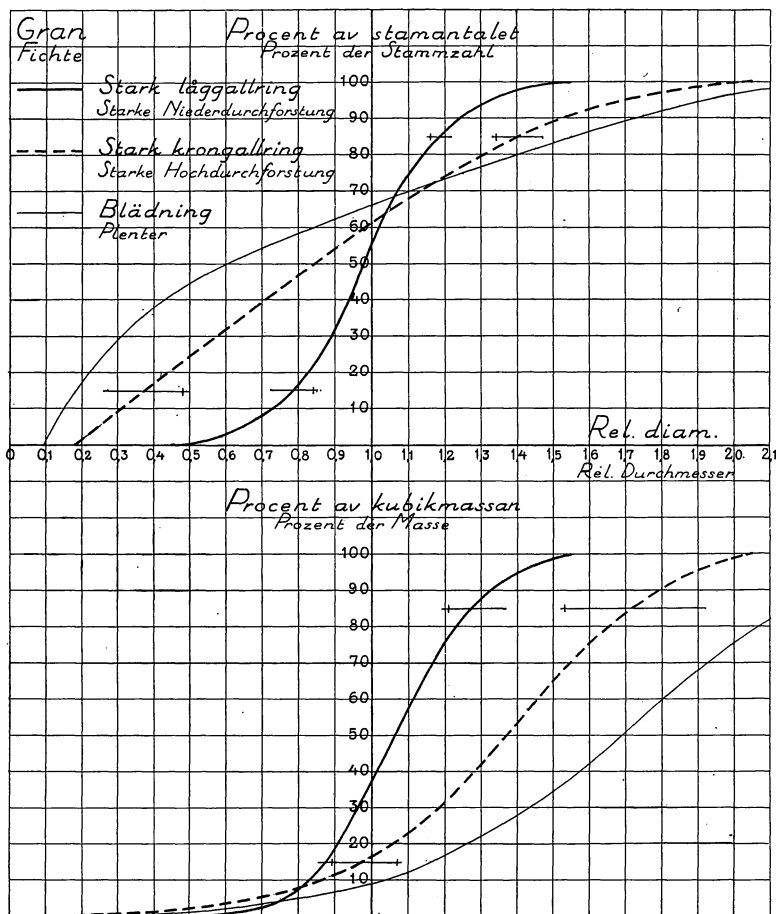


Fig. 9. Stamantalets och kubikmassans fördelning kring medeldiametern (rel. diam. 1,0). Gran.

Die Verteilung der Stamanzahl und der Masse um den mittleren Durchmesser (rel. Durchm. 1,0). Fichte.

(III—IV). För bättre bonitet går tendensen mot en lodrätare form för kurvorna och således mera koncentrerad fördelning kring medeldiametern, vilket betecknas med + vid spridningens markerande. För sämre bonitet är förhållandet motsatt. Bonitetens inverkan på stamantalets och kubikmassans fördelning kan även uttryckas på följande sätt. För viss



behandlingsform ökas frekvensen kring medeldiametern med stigande bonitet och tvärtom.

Av fig. 8 och 9 samt tabellerna 9 och 10 framgår det välkända förhållandet, att granen har större variationsvidd kring medeldiametern än tallen. Vidare synes att medeldiametern har ett väl fixerat läge i stamfördelningsserien, som för de ganska extrema behandlingsformerna varierar inom mycket snäva gränser. Således ligger den 55—56 % av stamantalet från minsta dimension för tall och 55—61 % för gran, vilket är en god bekräftelse på WEISES gamla regel. Denna egenskap hos medeldiametern få vi anledning utnyttja i det följande. Materialets variation kring kurvorna når också sitt minimum vid medeldiametern. Inom kubikmassan är dock medeldiameterns läge mera variabelt. För tall 32—41 % från minsta dimension och för gran 17—37 %, varvid den lägre procenten gäller krongallring.

Krongallringen visar helt naturligt en utpräglad skevhet i stamfördelningen, då vid denna gallringsform tredje och fjärde kronskikten med undantag för torra och döende träd lämnas orörda, och är skevheten givetvis mera framträdande hos gran än hos tall. På grund av låggallringens princip av gallring underifrån är skevheten här obetydlig och obestämmd samt variationsvidden i diameter avsevärt mindre än för krongallring. (Jfr tab. 10.)

Det torde knappast behöva framhållas, att de här framlagda fördelningskurvorna endast avspegla gallringsformerna i deras mera typiska utförande och då närmast efter försöksanstaltens gallringsschema (SCHOTTE 1912).

## KAP. V. Antalet provträd för viss säkerhet på medelhöjden.

Vi skola nu övergå till att söka bestämma det antal provträd, som erfordras för viss säkerhet å medeldiameterns höjd, och utgå då från följande schematiska exempel:

De  $N$  provträden antagas fördelade i  $n = 2\nu + 1$  klasser med den gemensamma bredden  $h$  (på  $x$ -axeln). Origo lägges i den mittersta klassens mittpunkt, och provträden förutsättas ekvidistant fördelade, d. v. s. lika i var och en av de  $n$  klasserna, samt höjdkurvan av formen  $y = a + bx + cx^2$ . Efter några räkneoperationer finner man då enligt formel 2 och tabellerna 5 och 6:

$$\epsilon_y^2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu^2+\nu-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}(\nu^2+\nu+3)\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{h}\right)^4}{\nu(\nu+1)(\nu^2+\nu-\frac{3}{4})} \cdot \frac{9\sigma^2}{4N} \dots (5)$$

För  $x = 0$  blir

$$\varepsilon_y^2 = \frac{\nu^2 + \nu - \frac{1}{8}}{\nu^2 + \nu - \frac{3}{4}} \cdot \frac{9\sigma^2}{4N}$$

eller då  $\nu$  ej är alltför litet approximativt  $= \frac{9\sigma^2}{4N}$  och

$$\varepsilon_y = \frac{1,5 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (6)$$

Formel 6 anger tydligen medelfelet på genomsnittsdiameterens (aritmetiska medeldiameterens) höjd.

Det polynom i  $x$ , som uppträder i formel 5, har för  $x = 0$  en maxipunkt. I den närmaste omgivningen av  $x = 0$  är medelfelet alltså mindre än det nyss angivna värdet för  $x = 0$ .

För ej alltför små värden på  $\nu$  kan  $\varepsilon_y^2$  tydligen approximativt skrivas:

$$\varepsilon_y^2 = \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{\nu h} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{\nu h} \right)^4 \right] \cdot \frac{9\sigma^2}{4N},$$

då man i varje term endast bibehåller den högsta potensen av  $\nu$ .

Härav fås:

$$\varepsilon_y = K_x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (7)$$

där

$$K_x = 1,5 \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{\nu h} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{\nu h} \right)^4}$$

Man får:

$\frac{x}{\nu h}$	$K_x$
0	1,5
$\pm 0,25 \nu h$	1,5
$\pm 0,50 \nu h$	1,7
$\pm 0,75 \nu h$	2,3
$\pm \nu h$	3,6

Ovanstående  $K_x$ -värdena äro givetvis mycket approximativa och kunna endast användas för högre värden på  $\nu$ .

Medelfelet stiger med undantag av den närmaste omgivningen symmetriskt på båda sidor om genomsnittsdiametern (fig. 10).

Schematisera vi vårt exempel ytterligare och antaga att sambandet mellan höjd och diameter är linjärt, kan på samma sätt visas att formeln för medelfelet blir:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (8)$$

oberoende av diametern. Denna formel har använts av TISCHENDORF (1925 och 1927), och återkomma vi härtill i det följande.

Vi skola nu övergå till att studera säkerheten i höjdkurvans olika delar vid ej ekvidistant stamfördelning.

För detta ändamål ha 60 representativa provträd uttagits efter viss kvot för ytorna sf 50<sup>II</sup> (extra stark låggallring) och sf 50<sup>IV</sup> (extra stark krongallring) i samma jämförande försöksserie. Resp. höjdkurvor ha numeriskt utjämnats, och medelfelet å höjden för varannan diameterklass

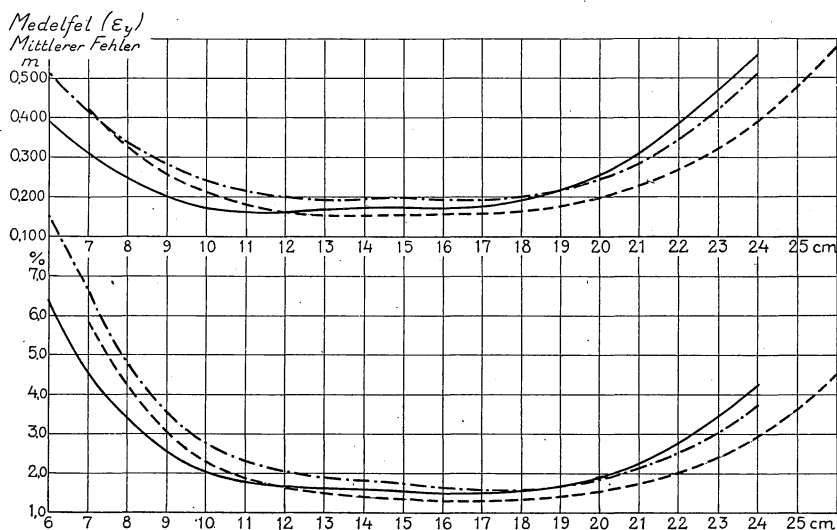


Fig. 10. Höjdkurvans medelfel ( $\varepsilon_y$ ) för olika diametrar.

Der mittlere Fehler der Höhenkurve ( $\varepsilon_y$ ) für verschiedene Durchmesser.

- Sf 50IV. Ex. stark krongallring, vart  $n$ :te träd provträd.
- Sf 50IV. Ex. starke Hochdurchforstung, jeder  $n$ :te Baum Probestamm.
- - - Sf 50II. Ex. stark låggallring, vart  $n$ :te träd provträd.
- SF 50II. Ex. starke Niederdurchforstung, jeder  $n$ :te Baum Probestamm.
- · · · Sf 50IV. Ekvidistant fördelade provträd.
- Sf 50IV. Ekvidistant verteilte Probestämme.

uträknats enligt i det föregående beskriven metod, varvid dock medelavvikelsen för båda ytorna satts = 1,0 m för att bli jämförbara med avseende på stamfördelningens inverkan på höjdkurvans säkerhet. Medelfelet har uttryckts dels i m, dels i % av resp. höjd. Dessutom har för ytan sf 50<sup>IV</sup> medelfelet beräknats vid ekvidistant fördelning av de 60 provträden enl. formel 5 (fig. 10).

Av fig. 10 framgår liksom av föregående deduktion att höjdkurvan vid ekvidistant fördelning av provträden blir säkrast bestämd i abs. mått vid mitten och i rel. mått med någon förskjutning åt de grövre diameterklasserna. Höjdkurvans abs. säkerhet är symmetrisk kring mittklassen, och följaktligen är

den rel. säkerheten större för de högre klasserna än för de lägre.

I förhållande till krongallringen ger den ekvidistanta fördelningen lägre medelfel för de grövre diametrarna, men för de lägre tvärtom på grund av krongallringstypens stora stamfrekvens i de senare klasserna. Den ekvidistanta fördelningen kan givetvis ej jämföras med låggallringsfördelningen (sf 50<sup>II</sup>), emedan medelpunkten då måste flyttas uppåt i diameter-skalan och kurvslängden blir en annan.

Vid krongallring blir höjdkurvan säkrare bestämd för de klenare dimensionsklasserna än vid låggallring, men för de grövre är förhållandet motsatt. Detta gäller vid den här använda metoden för provträdens uttagande (vart  $n$ :te träd) och beror tydligen på de båda gallringsformernas skilda stamfördelningstyper (sid. 31).

Beträffande höjdkurvans säkerhet på båda sidor om mittersta diameterklassen synes, att de lägre diametrarnas höjder i abs. mått äro säkrare bestämda än de högre, och att denna skillnad är mera framträdande vid krongallring än vid låggallring, beroende på stamfördelningens större skevhet. Den procentuella säkerheten är däremot för båda stamfördelningstyperna större för de högre höjderna än för de lägre (fig. 10).

Återvända vi till formel 7:  $\left(\varepsilon_y = K_x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$ , synes att vid ekvidistant provträdsfördelning medelfelet å höjden ( $\varepsilon_y$ ) för viss diameter ( $x$ ) minskas vid ökning av provträdsantalet ( $N$ ) med roten ur antalet och tvärtom. Här återfinna vi en välkänd sats, som för sannolikhetskalkylens praktiska användning är av största betydelse.

Det är tydligt att formel 7 kan generaliseras att gälla för variabelt provträdsantal ( $N$ ) vid viss konstant provträdsfördelning (variationsvidd och klassfrekvens), ehuru givetvis med andra  $K_x$ -värden, än de som deducerats för den ekvidistanta fördelningen. Medelavvikelsen ( $\sigma$ ) är konstant och få vi alltså ekv.

$$\frac{\varepsilon_{y_i}}{\varepsilon_{y_j}} = \sqrt{\frac{N_j}{N_i}} \dots \dots \dots (9)$$

Härav synes, att medelfelet på höjden för vissa diameter är omvänt proportionellt mot kvadratroten ur antalet. Under förutsättning av konstant fördelning kan således enligt formel 9 av ett givet material beräknas det provträdsantal, som erfordras för ett fixerat medelfel.

Vid objektiv provträdstagning i homogena försöksytor och bestånd, vilket enklast sker genom att vart  $n$ :te träd i stamräkningslängden tages till provträd, äro förutsättningarna för en approximativt konstant fördel-

ning stora, såvida antalet ej är alltför litet. Särskilt måste detta vara fallet i den närmaste omgivningen av en diameter med ett mera stabilt läge i frekvensserien. I detta avseende fyller medeldiametern stora anspråk. (Jfr sid. 32.)

Deduktionen av formel 9 har delvis varit induktiv, och bör formeln således verifieras. För detta ändamål ha försöksytorna  $27^I$ , sf  $50^{II}$ , sf  $50^{IV}$  bearbetats på följande sätt. Av medelfelen på medeldiameterns höjd, då samtliga träd mätts (tab. 8), ha enligt formel 9 motsvarande medelfel för resp. 60 och 20 provträd beräknats (tab. 11, teoretiskt värde). Sedan ha resp. 60 och 20 provträd uttagits efter viss kvot, motsvarande höjdkurvor numeriskt utjämnats och medelfelet på höjden beräknats dels för provträdens, dels för försöksytans medeldiameter (tab. 11, verkligt värde).

Vid numerisk utjämning av ett ringa antal höjder kan en eller annan mycket avvikande höjd, som man vid grafisk utjämning ej skulle taga hänsyn till, lätt förrycka resultatet. Detsamma gäller bestämningen av medelavvikelsen. B. PEIRCE har emellertid framställt en metod för utelämnande av mera avvikande observationer (CZUBER 1891). Enligt denna metod utelämnar man vid exv. 20 observationer, den som har den största avvikelsen, om den är större än  $2,21$  av medelavvikelsen, och därefter, sedan en observation uteslutits, den som har näst största avvikelsen, om denna överstiger  $1,91$  av medelavvikelsen etc. Metoden är objektiv, men bör användas med kritik. I föreliggande fall har metoden endast föranlett två träd utelämnande, nämligen ett av de tjugu provträden för vardera av ytorna  $27^I$  och sf  $50^{II}$ .

Formeln för medelfelet (2) kan skrivas:  $\epsilon_y = \sigma \cdot R_x$  där  $R_x$  endast är beroende av provstammarnas antal och fördelning (sid. 26). Vore fördelningen exakt konstant skulle de teoretiska och verkliga värdena för  $R_x$  sammanfalla. Skillnaden mellan dessa värden är därför ett kriterium på överensstämmelsen mellan verklig och teoretisk provträdsfördelning. Av tab. 11: I framgår att denna differens är ringa, och demonstrera de värden å medelfelet, som äro angivna inom parentes, dess betydelse i abs. mått. Dessa äro nämligen bestämda med hjälp av samma medelavvikelser, som ligga till grund för det teoretiska värdet, d. v. s. de som erhållits då samtliga träd medtagits. Differensen varierar enligt tab. 11: I endast mellan 2—10 mm och går i såväl positiv som negativ riktning, vilket visar, att vi för materialets försöksytor med god approximation kunna anse provträdsfördelningen konstant vid variabelt antal. Det ligger i sakens natur att denna approximation blir sämre vid minskning av antalet, ehuru det ej direkt framgår av dessa få ytor.

Det aktuella medelfelet beror dessutom på bestämningen av medel-

Tab. 11. Jämförelse mellan verkliga och teoretiska värden på medelfelet vid olika provträdsantal.  
 Vergleichung zwischen wahren und theoretischen Werten des mittleren Fehlers bei verschiedenen Anzahl der Probestämme.

Försöksyta n:r Versuchsfläche N:r	A n t a l   p r o v t r ä d Die Anzahl der Probestämme													
	Samtliga Sämtliche				60						20			
	Antal Anzahl	$\sigma$	Verkligt värde Wahrer Wert		$\sigma$	Verkligt värde Wahrer Wert		Teoretiskt värde Theoretischer Wert		$\sigma$	Verkligt värde Wahrer Wert		Teoretiskt värde Theoretischer Wert	
			R	$\epsilon$		R	Medelfel( $\epsilon$ ) Mittlerer Fehler m	R	$\epsilon$		R	$\epsilon$	R	$\epsilon$
				m					m			m		m
I.   Medelfelet på höjden för provträdens medeldiameter Der mittlere Fehler der Höhe für den Durchmesser der Probestämme														
27: I .....	183	$0,84 \pm 0,044$	0,094	0,079	$0,84 \pm 0,078$	0,176	0,148	0,164	0,138	$0,81 \pm 0,139$	0,281	$0,228 (0,236)$	0,284	0,239
Sf. 50: II .....	203	$0,89 \pm 0,045$	0,086	0,077	$0,83 \pm 0,073$	0,162	$0,135 (0,144)$	0,159	0,142	$0,89 \pm 0,148$	0,278	0,247	0,275	0,245
Sf. 50: IV .....	231	$0,94 \pm 0,044$	0,084	0,079	$0,92 \pm 0,086$	0,171	$0,157 (0,161)$	0,165	0,155	$1,00 \pm 0,172$	0,276	$0,276 (0,259)$	0,287	0,269
II.   Medelfelet på höjden för ytans medeldiameter Der mittlere Fehler der Höhe für den Durchmesser der Fläche														
27: I .....	—	—	—	—	—	0,182	0,153	—	—	—	0,290	$0,235 (0,244)$	—	—
Sf. 50: II .....	—	—	—	—	—	0,160	$0,133 (0,142)$	—	—	—	0,285	0,254	—	—
Sf. 50: IV .....	—	—	—	—	—	0,171	$0,157 (0,161)$	—	—	—	0,292	$0,292 (0,274)$	—	—



avvikelsen ( $\sigma$ ). Medelavvikelsen är enligt det föregående konstant, men säkerheten i dess bestämning ökas med stigande provträdsantal. De härav framkomna skillnaderna i medelavvikelse äro små, 0—6 cm och ligga inom felgränserna för den säkrast bestämda medelavvikelsen (samtliga träd). På grund härav är också skillnaden mellan de verkliga och teoretiska värdena obetydlig, 2—11 mm. Det teoretiskt beräknade medelfelet visar således god överensstämmelse med det ur provträden härledda värdet.

Det teoretiskt beräknade medelfelet på medeldiameterns höjd enligt formel 9 gäller tydligen provträdens medeldiameter, men det som närmast intresserar oss är felet å höjden för försöksytans (beståndets) medeldiameter. Felet å denna medelhöjd (enl. formel 9) blir alltid för lågt, om provytans medeldiameter är större än provträdens, är förhållandet motsatt kan felet likaväl bli för stort som för litet beroende på stamfördelningen (jfr tab. 11 och fig. 10).

En uppfattning om storleken av detta fel ger tab. 11 vid jämförelse mellan I och II. Härav framgår att det teoretiska värdet genomgående är lägre, samt att differensen mellan de båda medelfelen varierar mellan 2—15 mm. Vid en kalkyl över det provträdsantal, som erfordras för viss säkerhet å medelhöjden, torde därför denna skillnad kunna negligeras, då det gäller homogena försöksytor och bestånd, samt provträdsantalet ej är för ringa.

De fåtaliga försöksytorna i tab. 11 kunna givetvis endast visa storleksordningen på de fel som riskeras på grund av att förutsättningarna för formel 7, konstant provträdsfördelning och medeldiameter, endast approximativt kunna uppfyllas. Det är dock av intresse att veta vad de framkomna differenserna betyda för vårt ändamål. Av tab. 11: II synes att skillnaderna mellan verklighet och teoretiskt medeltal varierar mellan 2—23 mm eller 1,5—8 %, vilket vid bestämning provträdsantalet för ett fixerat medelfel motsvarar 2—14 % skillnad mellan verkligt och teoretiskt beräknat antal.

Sätta vi provträdens medelhöjd = försöksytans, kan tydligen enligt formel 9:  $\frac{\epsilon_{y_i}}{\epsilon_{y_j}} = \sqrt{\frac{N_j}{N_i}}$  beräknas det antal provträd, som erfordras för visst procentuellt medelfel å medelhöjden ( $\epsilon'_{y_j}$ ). Detta är naturligtvis en approximation, men vid de små höjddifferenser, det är fråga om, kan bortses härifrån. Med hjälp av medelfelet, då samtliga träd mätts (tab. 8), har på detta sätt uträknats det antal provträd, som erfordras för ett medelfel i medelhöjden (medeldiameterns höjd) av resp.  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 och 3 % (tab. 12).

# ANTALET PROVTRÄD OCH HÖJDKURVANS NOGGRANNHET 131

**Tab. 12. Antal provträd, som erfordras för ett medelfel på medelhöjden av resp.  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 och 3 %. Försöksytor.**

Zahl der Probestämme, die zu einem mittleren Fehler der mittleren Höhe von resp.  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 und 3 % erforderlich ist. Versuchsflächen.

Försöks- yta Versuchs- fläche N:r	Höjdmätt trädslag Höhen- gemessene Baumart	Ålder Alter	Bonitet Bonität	Behandlingsform Behandlungsform	Medel- avvi- kelse Disper- sion %	Antal provträd för ett medel- fel av Zahl der Probestämme zu einem mittleren Fehler von			
						$\frac{1}{2}$ %	1 %	2 %	3 %
27: I	Tall Kiefer	50	IV	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	6,3	230	57	14	6
27: II	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	6,1	227	57	14	6
27: IV	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	6,8	299	75	19	8
27: V	Tall Kiefer	50	IV	Svag krongallring Schwache Hochdurchforstung	8,1	444	111	28	12
27: VII	Tall Kiefer	50	IV	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	6,8	320	80	20	9
Sf. 17: I	Tall Kiefer	81	III	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	5,9	210	52	13	6
Sf. 31	Gran Fichte	95	IV	Stark krongallning Starke Hochdurchforstung	7,4	420	105	26	12
Sf. 32	Gran Fichte	85	III	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	8,9	524	131	33	15
Sf. 50: II	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	7,7	354	88	22	10
Sf. 50: III	Tall Kiefer	100	VI	Orörd Ungerührt	8,8	502	126	31	14
Sf. 50: IV	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	8,7	492	123	31	14
Sf. 56: I	Gran Fichte	80—135	IV	Stamvis blädning Plenter	8,0	463	116	29	13
Sf. 56: II	Gran Fichte	50—85	IV	Stamvis blädning Plenter	9,0	620	155	39	17
Sf. 60	Gran Fichte	99	V	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	8,7	561	140	35	16
253	Gran Fichte	95	II	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	4,8	164	41	10	5
349: I	Gran Fichte	57	II—(III)	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	5,3	190	48	12	5

Formel 9 kan formuleras på följande sätt: för att sänka medelfelet från 3—2 % måste provträdsantalet  $2^{1/4}$ -dubblas, från 2—1 % 4-dubblas och från  $1-1/2$  % likaledes 4-dubblas och närmar sig medelfelet asymptotiskt mot noll. Av tab. 12 synes, att för materialets försöksytor erfordras 5—17 provträd, för att ett medelfel av 3 % å medelhöjden kan förväntas, 10—39 st. för 2 %, 41—155 st. för 1 % samt 164—620 st. för  $1/2$  % medelfel. Skillnaderna i effekt mellan de första och de sista ökningarna av provträdsantalet framgå med skärpa. Det låga stamantalet för ytorna 253 och 349<sup>1</sup> förklaras av deras uppkomstsätt genom kultur och på grund härav ringa medelavvikelse.

Medelfelet hänför sig till variationstypen. I kap. VI visas att detta medelfel för de stora stamantal, det är fråga om vid uppskattningar i praktiken, kan med god approximation överföras att gälla uppskattningsobjektet (beståndet, skogen etc.). För försöksytor måste däremot medelfelet hänfört till själva ytan ofta beräknas på annat sätt, vilket behandlas i kap. VI. Vid uppskattning av försöksytor är det emellertid vanligen endast felet hänfört till variationstypen, som intresserar, men diskuterar detta närmare i kap. VIII.

Av tab. 12 framgår vidare, att krongallringsytorna genomgående ha större medelfel än låggallringsytorna. Detta beror dels på lägre medelhöjd och därmed högre procentuell medelavvikelse, dels negativ eller större negativ asymmetri i stamfördelningen, varav följer osäkrare bestämning av medelhöjden (tab:na 9 och 10, fig. 10) samt dels större variationsvidd i diameter hos krongallringsytor i jämförelse med låggallringsytor (tab. 7).

Vid samma medelavvikelse bör gran ge större medelfel på grund av mera utpräglad asymmetri och större variationsvidd (tab:na 9 och 10).

Vid viss behandlingsform stiger den procentuella medelavvikelsen med sjunkande medelhöjd för lägre höjder (jfr fig. 6), och därmed det erforderliga provträdsantalet för viss säkerhet.

Medelfelet på höjden för viss diameter kan enligt det föregående skrivas:

$$\epsilon_y = K_x \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \text{ där } K_x \text{ är oberoende av } N.$$

Med hjälp av tab. 8 ( $\epsilon_y$ ,  $\sigma$  och  $N$ ) kunna vi således av materialet bestämma  $K$  för medeldiameterens höjd för de olika försöksytorna. I tab. 13 återfinnes på så sätt härledda  $K$ -värden.

$K$  ligger för tall mellan 1,24—1,31 och för gran mellan 1,28—1,39, varvid de lägre värdena gälla låggallning och de högre krongallring. Orsakerna till skillnaden mellan de båda gallringsformerna

Tab. 13. Konstanter  $K$  i ekv:  $\varepsilon_y = K \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ .

Die Konstante  $K$  in der Gleichung:  $\varepsilon_y = K \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ .

Försöksyta Versuchsfläche N:r	Trädslag Baumart	Behandling Behandlung	$K$
27: I .....	Tall Kiefer	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	I,27
27: II .....	Tall Kiefer	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	I,24
27: IV .....	Tall Kiefer	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	I,29
27: V .....	Tall Kiefer	Svag krongallring Schwache Hochdurchforstung	I,29
27: VII .....	Tall Kiefer	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	I,31
Sf. 17: I .....	Tall Kiefer	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	I,24
Sf. 31 .....	Gran Fichte	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	I,39
Sf. 32 .....	Gran Fichte	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	I,28
Sf. 50: II .....	Tall Kiefer	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	I,24
Sf. 50: III .....	Tall Kiefer	Orörd Ungerührt	I,29
Sf. 50: IV .....	Tall Kiefer	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	I,28
Sf. 56: I .....	Gran Fichte	Stamvis blädning Plenter	I,35
Sf. 56: II .....	Gran Fichte	Stamvis blädning Plenter	I,39
Sf. 60 .....	Gran Fichte	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	I,37
253 .....	Gran Fichte	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	I,34
349: I .....	Gran Fichte	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	I,30

och trädslagen framgå av diskussionen beträffande motsvarande skiljaktigheter i medelfelet.

Av det schematiska exemplet sid. 33 (fig. 10) med ekvidistant fördelning av provträden och höjdkurvan av den allmänna formen för en andra grads parabel framgick, att medelfelet på genomsnittsdiameterns höjd är:

$$\epsilon_y = \frac{1,5 \sigma}{\sqrt{N}}, \text{ och att detta fel, med undantag av den närmaste omgivningen,}$$

ökar symmetriskt på båda sidor om denna diameter. För medeldiameterns höjd blir därför medelfelet i regel något större. De empiriskt framkomna lägre konstantvärdena bero givetvis på den större stamfrekvensen kring medeldiametern.

TISCHENDORF har tidigare varit inne på det här behandlade ämnet (1925, 1927). Efter en enkel överläggning (»es hängt daher die Güte irgendeiner Höhe vom Verlauf der ganzen Kurve, also von der Anzahl der erhobenen Höhen ab») finner TISCHENDORF att medelfelet på en utjämnad höjd är:  $\epsilon_y = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  och således oberoende av diametern (jfr fig. 10).

I det föregående hava vi sett, att förutsättningarna för denna formel äro linjärt samband mellan diameter och höjd samt ekvidistant fördelning av provträden och härmed torde formelns starkt begränsade användbarhet vara klarlagd. Abstraktionen går här in absurdum (jfr sid. 3). På materialet till denna föreliggande undersökning ger denna formel 25—40 % för lågt medelfel på medelhöjden (tab. 13) och för övriga höjder blir felet i regel ännu större. Det torde redan här påpekas, att felet i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet ej blir fullt så missvisande.

På grund av  $K$ -värdenas variation inom mycket snäva gränser torde för överslagskalkyler följande empiriska närmeformler för medelhöjdens medelfel kunna uppställas:

$$\text{Tall: } \epsilon_y = \frac{1,25 \text{ à } 1,30 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{Gran: } \epsilon_y = \frac{1,30 \text{ à } 1,40 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (11)$$

där de lägre konstantvärdena gälla bestånd av låggallringstyp och de högre värdena krongallringstyp. Försöksytan sf 56<sup>I</sup> är ur stamfördelningssynpunkt närmast att hänföra till krongallringstyp och ytan sf 56<sup>II</sup> en övergångsform till stamvis blädning. Ytan sf 32 har en tvåtoppig frekvenskurva med 80 % av stamantalet i 3:dje och 4:de kronskikten, vilket förklarar det låga  $K$ -värdet.

På grund av materialets begränsade omfattning ha givetvis konstantvärdena endast mera provisorisk karaktär. Materialets ytor representera dock extrema huggningsformer, och enligt den föregående framställningen är stamfördelningen väsentligt beroende av behandlingsform och trädslag samt konstantvärdena i sin tur beroende av stamfördelningen. I praktiskt skogsbruk kan dock konstanternas variation förväntas vara större och oftare tendera mot högre än lägre värden, på grund av större tolerans med smådimensionerna, än vad den mera schematiska låggallringsformen för försöksytor tillåter.

Vid tillämpningen av empiriska formler är det av vikt att klarlägga de egenskaper hos materialet, som utgöra förutsättningar för formlerna. Här äro dessa följande. Höjdkurvan av den allmänna formen för en andragradsparabel ( $y = a + bx + cx^2$ ), spridningen kring höjdkurvan oberoende av diametern samt stamfördelningen att hänföra till huggningsformerna låggallring—krongallring. Dessa förutsättningar torde ofta med god approximation återfinnas i likåldriga bestånd.

Med hjälp av formlerna 10 och 11 erhålles medelfelet på medelhöjden, om medelavvikelsen ( $\sigma$ ) är känd. Den senare kan, såvida antalet provträd ej är alltför ringa, nöjaktigt beräknas från den grafiskt utjämnade höjdkurvan (jfr tab. 2). Avviker höjdkurvan nämnvärt från den här använda utjämningssekvationen, är givetvis en på detta sätt bestämd medelavvikelse också ett sannare värde.

Enligt denna metod har med ledning av provträden medelfelet på medelhöjden beräknats för de åtta trakterna från Siljansfors försökspark. Konstantvärdena ha valts genom jämförelse mellan provträdens stamfördelning och de i tabellerna 9 och 10 angivna fördelningsserierna för försöksytor. Därefter har enl. formeln 9 det antal provträd beräknats, som erfordras för ett medelfel på medelhöjden av resp. 1, 2 och 3 %. Resultatet återgives i tab. 14.

De här använda trakterna äro att betrakta som bestånd och växlar arealen mellan 2,3—12 ha (tab. 1). Medelavvikelsen varierar från 8,4 till 12,1 %, under det att motsvarande siffror för försöksytorna voro 5,9—9 % (und. bon II). Dessa siffror äro ej direkt jämförbara som uttryck för variationstypen på grund av skillnaderna i mätningssmetod (sid. 6) och behandlingsform samt den senares inverkan på medelhöjden. De friare huggningsformerna å trakterna närmar sig mera krongallringstyp, varför denna behandlingsform är överrepresenterad i förhållande till försöksytorna. Detta uppväges i någon mån av försöksytornas lägre medelhöjder (fig. 6). Det måste dock kunna förutsättas att variationen är större i bestånd än å försöksytor, ehuru skillnaden med ledning av detta material ej närmare kan preciseras.

Tab. 14. Antal provträd, som erfordras för ett medelfel på medelhöjden av resp. 1, 2 och 3 %. Trakter (bestånd) å Siljansfors försökspark.  
Zahl der Probestämme, die zu einem mittleren Fehler der mittleren Höhe von resp. 1, 2 und 3 % erforderlich ist. Bestände in dem Versuchspark Siljansfors.

Trakt Bestand N:r	Höjdmätt träds- slag Höhen- gemessene Baumart	Ålder Alter	Bonitet Bonität	Be- hand- lung Behandlung	Antal träd Anzahl Bäume	Medel- höjd Mittlere Höhe	Medelavvikelse Dispersion		Medel- fel Mittlerer Fehler	K	Antal träd för ett medelfel av Zahl der Probestämme zu einem mittleren Fehler von		
							m	%			1 %	2 %	3 %
147	Tall Kiefer	95	III	Fri krongallring Freie Hochdurchforstung	96	23,4	$1,62 \pm 0,119$	$6,9 \pm 0,51$	0,88	1,25	74	19	8
193	Gran Fichte	100	IV	Fri genomhuggning Freier Durchhieb	143	14,8	$1,47 \pm 0,087$	$9,9 \pm 0,59$	1,16	1,40	166	41	18
199	Gran Fichte	85	IV	Fri gallring Freie Durchforstung	153	15,1	$1,32 \pm 0,076$	$8,7 \pm 0,50$	0,97	1,38	144	36	16
153	Gran Fichte	100	IV—(III)	Fri genomhuggning och föryngringshuggning Freier Durchhieb und Ver- jüngungshieb	135	18,3	$1,69 \pm 0,104$	$9,2 \pm 0,57$	1,11	1,40	166	41	18
195	Tall Kiefer	120	V	Fri genomhuggning Freier Durchhieb	114	17,1	$1,65 \pm 0,111$	$9,6 \pm 0,65$	1,19	1,32	162	40	18
150	Tall Kiefer	130	V	Ljushuggning Lichtung	156	16,4	$1,38 \pm 0,079$	$8,4 \pm 0,48$	0,84	1,25	110	28	12
126	Tall Kiefer	90	V—(IV)	Gallring och föryngrings- huggning Durchforstung und Ver- jüngungshieb	82	15,8	$1,91 \pm 0,152$	$12,1 \pm 0,96$	1,74	1,30	248	62	28
129	Gran Fichte	100	IV—(III)	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	84	11,1	$1,61 \pm 0,127$	$10,0 \pm 0,79$	1,47	1,35	182	45	20

Av tab. 14 synes att det erfordras 74—248 provträd för 1 % medelfel på medelhöjden, 19—62 för 2 % och 8—28 för 3 %. Behovet av provträd vid olika huggningsformer och trädslag har närmare diskuterats i samband med försöksytorna.

## KAP. VI. Kubikmassans noggrannhet med hänsyn till höjdkurvans osäkerhet.

Medelfelet hänfört till den variationstyp, som representeras.

Beräkna vi kubikmassan i ett bestånd med ledning av å höjdkurva avläst medelhöjd, blir det procentuella medelfelet i kubikmassan med hänsyn till höjdkurvans osäkerhet lika med medelhöjdens. Göra vi flera avläsningar å höjdkurvan och sätta beståndets kubikmassa lika med summan av diameterklassernas, blir felet i kubikmassan mindre på grund av felutjämning mellan klasshöjdernas medelfel.

Det gäller att uppskatta medelfelet i kubikmassan vid den här valda klassindelningen (1 cm), hänfört till den variationstyp provträden representera. Höjdernas medelfel äro sinsemellan beroende av varandra, varför den allmänna formeln för medelfelet på en summa ej kan tillämpas.

Låt  $p_j$  beteckna stamantalet,  $f_j$  produkten av formtal och  $\frac{\pi}{4}$  i  $j$ :te diameterklassen. Kubikmassan blir då:

$$\sum_j p_j \cdot f_j \cdot x_j^2 \cdot y_j.$$

Men  $y_j$  är obekant. Vi ersätta  $y_j$  med sitt närmevärde  $a + \beta x_j + \gamma x_j^2$ , där  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  äro bestämda genom numerisk utjämning av provträdens höjder ( $y_i$ ) och söka medelfelet ( $\varepsilon_V$ ) för kubikmassans närmevärde:

$$V = \sum_j p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2).$$

Medelfelet kan beräknas på sammasätt som för  $y$ .  $V$  erhålles nämligen om man i formel 1 (sid. 21) ersätter 1,  $x$  och  $x^2$  i determinantens första rad med resp.

$$\sum_j p_j \cdot f_j \cdot x_j^2, \quad \sum_j p_j f_j x_j^3, \quad \sum_j p_j f_j x_j^4.$$

Man finner då följande slutformel:

$$\varepsilon_V = \sigma \sqrt{\frac{\Delta_{00} t_0^2 + \Delta_{11} t_1^2 + \Delta_{22} t_2^2 + 2 \Delta_{01} t_0 t_1 + 2 \Delta_{02} t_0 t_2 + 2 \Delta_{12} t_1 t_2}{\Delta}}, \quad (12).$$

Determinanten ( $\Delta$ ) och underdeterminanterna ( $\Delta_{00}$ ,  $\Delta_{11}$  ...) äro identiska



Tab. 15. Antalet provträd, som erfordras för ett medelfel i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet av resp.  $\frac{1}{2}$ , 1 och 2 %. Försöksytor.

Zahl der Probestämme, die wegen der Unsicherheit der Höhenkurve zu einem mittleren Fehler des Kubikinhalts von resp.  $\frac{1}{2}$ , 1 und 2 % erforderlich ist. Versuchsflächen.

Försöks- yta Versuchs- fläche	Träd- slag Baum- art	Ålder Alther	Bonitet Bonität	B e h a n d l i n g Behandlung	Antal träd Anzahl Bäume	Medelfel på kubik- massan ( $\epsilon'_{\nu}$ )	Medelfel på medel- höjden ( $\epsilon'_{\gamma}$ )	Antal träd för ett medelfel av Zahl der Probe- stämme zu einem mittleren Fehler von		
						Mittlerer Fehler des Kubikinhalts ( $\epsilon'_{\nu}$ ) %	Mittlerer Fehler der mittl. Höje ( $\epsilon'_{\gamma}$ ) %	$\frac{1}{2}$ %	1 %	2 %
27:I	Tall Kiefer	50	IV	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	183	0,52	0,59	198	50	12
27:II	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	116	0,61	0,70	173	43	11
27:IV	Tall Kiefer	50	IV	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	157	0,58	0,69	211	53	13
27:V	Tall Kiefer	50	IV	Svag krongallring Schwache Hochdurchforstung	233	0,57	0,69	303	76	19
27:VII	Tall Kiefer	50	IV	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	150	0,62	0,73	231	58	14
Sf 17:I	Tall Kiefer	81	III	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	124	0,56	0,65	156	39	10
Sf 31	Gran Fichte	95	IV	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	160	0,67	0,81	287	72	18
Sf 32	Gran Fichte	85	III	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	177	0,73	0,86	377	94	24
Sf 50:II	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark låggallring Extra starke Niederdurchforstung	203	0,58	0,66	273	68	17
Sf 50:III	Tall Kiefer	100	VI	Orörd Ungerührt	249	0,61	0,71	371	93	23
Sf 50:IV	Tall Kiefer	100	VI	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	231	0,63	0,73	367	92	23
Sf 56:I	Gran Fichte	80-135	IV	Stamvis blädning Plenter	463	0,42	0,50	327	82	20
Sf 56:II	Gran Fichte	50-85	IV	Stamvis blädning Plenter	367	0,54	0,65	428	107	27
Sf 60	Gran Fichte	99	V	Stark krongallring Starke Hochdurchforstung	243	0,63	0,76	386	96	24
253	Gran Fichte	95	II	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	46	0,75	0,94	103	26	7
349:I	Gran Fichte	57	II-(III)	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	69	0,66	0,83	120	30	8

med motsvarande storheter vid den numeriska utjämningen av provträdens höjder ( $y_i$ ), (tab. 6, sid. 20).

Enligt formel 12 har medelfelet i kubikmassan uträknats för de olika tyorna, och återfinnes resultatet uttryckt i procent av den med ledning

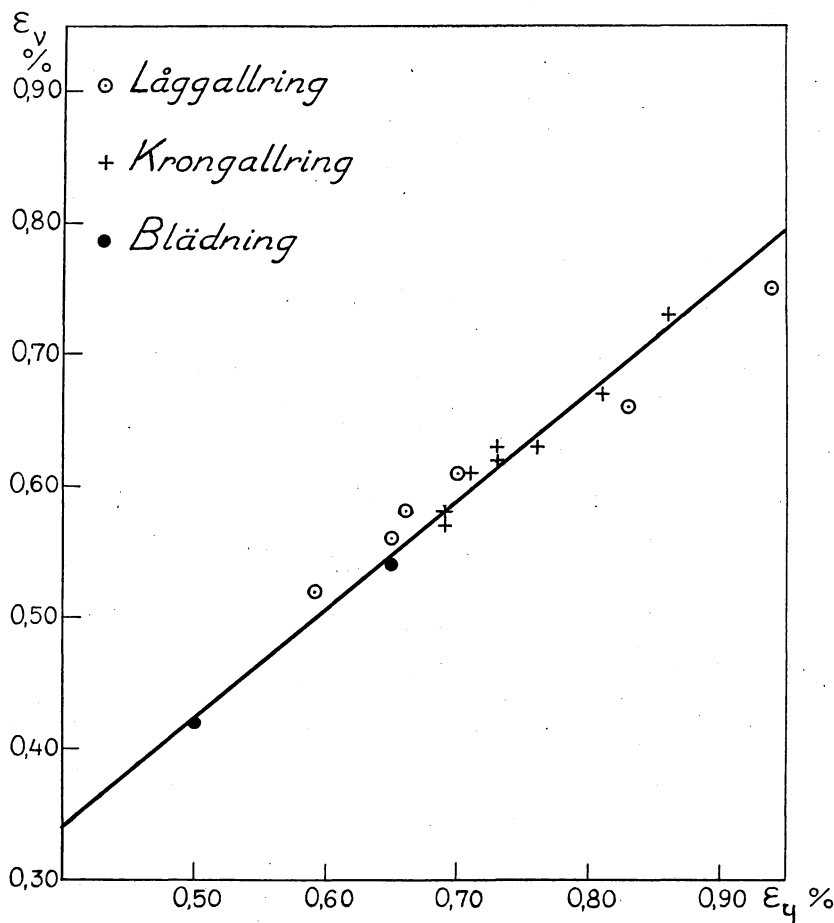


Fig. 11. Sambandet mellan medelfelet på medelhöjden ( $\epsilon_y$ ) och medelfelet i kubikmassan ( $\epsilon_V$ )

Die Beziehung zwischen dem mittleren Fehler der mittleren Höhe ( $\epsilon_y$ ) und dem mittleren Fehler der Masse.

○ Låggallring.      + Krongallring.      ● Blädning.  
Niederdurchforstung.      Hochdurchforstung.      Plenter.

av höjdkurvan beräknade kubikmassan i tab. 15. Detta medelfel är, som var att vänta, genomgående mindre än medelfelet på medelhöjden.

Av deduktionen av formel 9 inses, att denna formel även kan användas för beräkandet av det antal provträd, som erfordras för visst procentu-

ellt medelfel i kubikmassan. Resultatet av en sådan kalkyl för försöksytorna och procenterna:  $\frac{1}{2}$ , 1 och 2 framgår av tab. 15.

För  $\frac{1}{2}$  % medelfel i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet erfordras för detta material 103—428 provträd, för 1 % 26—127 st. och för 2 % 7—27 st. Krongallringsytorna erfordra flera provträd än läggallringsytorna, vilket närmare diskuterats i samband med medelhöjdens medelfel. Det relativt ringa provträdsantalet för granytorna 253 och 349<sup>1</sup> beror, som förut nämnts på uppkomstsättet (kultur).

Det kan a priori förutsättas vara ett fast samband mellan de procentuella medelfelen på medelhöjden och på kubikmassan, vilket även framgår av fig. 11, där dessa medelfel för försöksytorna upplagts grafiskt. Regressionslinjen, som tydligen skall gå genom origo blir:

$$\varepsilon'_V = 0,85 \varepsilon'_y \dots \dots \dots (13)$$

Närmeformlerna 10 och 11 övergå med hänsyn till procentuella medelfelet i kubikmassan sålunda avrundat till

$$\text{Tall: } \varepsilon'_V = \frac{1,05 \text{ à } 1,10 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (14)$$

$$\text{Gran: } \varepsilon'_V = \frac{1,10 \text{ à } 1,25 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (15)$$

där de lägre konstantvärdena avse läggallringstyp och de högre krongallringstyp samt  $\sigma$  medelavvikelsen i procent av medelhöjden.

Den av TISCHENDORF använda formeln:  $\varepsilon_y = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  ger på detta material 5—20 % för lågt medelfel på kubikmassan, vilket betyder 10—44 % för lågt provträdsantal för viss säkerhet. Närmeformlernas approximativa natur har tidigare framhållits.

Med ledning av tab. 14 och formel 13 har för de åtta trakterna (bestånden) å Siljansfors försökspark uträknats det antal provträd, som erfordras för att uppnå ett medelfel i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet av 1, 2 och 3 %.

För 1 % medelfel varierar det erforderliga provträdsantalet mellan 53—179 för 2 % 13—45 och för 3 % 6—20. Dessa siffror äro givetvis mycket ungefärliga men torde dock ge en god uppfattning om den storleksordning det här är fråga.

#### Medelfelet i förhållande till uppskattningsytan.

Vi ha i det föregående beräknat medelfelet i förhållande till den variationstyp som provträden representera och skola övergå till en mera

Tab. 16. Antal provträd, som erfordras för ett medelfel i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet av resp. 1, 2 och 3 %. Trakter (bestånd) å Siljansfors försökspark.

Zahl der Probestämme, die wegen der Unsicherheit der Höhenkurve zu einem mittleren Fehler des Kubikinhalts von resp. 1, 2 und 3 % erforderlich ist. Bestände in dem Versuchspark Siljansfors.

Trakt Bestand	Höjdmätt träds- slag Höhen- gemessene Baumart	Ålder Alter	Bonitet Bonität	Behandling Behandlung	Antal träd Anzahl Bäume	Medel- träd höjd Mittlere Höhe	Medel- fel Mittlerer Fehler $\bar{e}_V$ %	Antal träd för ett medelfel av Zahl der Probestämme zu einem mittleren Fehler von		
								1 %	2 %	3 %
147	Tall Kiefer	95	III	Fri krongallring Freie Hochdurchforstung	96	23,4	0,88	53	13	6
193	Gran Fichte	100	IV	Fri genomhuggning Freier Durchhieb	143	14,8	1,16	120	30	13
199	Gran Fichte	85	IV	Fri gallring Freie Durchforstung	153	15,1	0,97	104	26	12
153	Gran Fichte	100	IV—(III)	Fri genomhuggning och föryngringshuggning Freier Durchhieb und Ver- jüngungshieb	135	18,3	1,11	120	30	13
195	Tall Kiefer	120	V	Fri genomhuggning Freier Durchhieb	114	17,1	1,19	117	29	13
150	Tall Kiefer	130	V	Ljushuggning Lichtung	156	16,4	0,84	79	20	9
126	Tall Kiefer	90	V—(IV)	Gallring och föryngrings- huggning Durchforstung und Verjüngungs- hieb	82	15,8	1,74	179	45	20
129	Gran Fichte	100	IV—(III)	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	84	16,1	1,47	131	33	15

principiell behandling av medelfelet i förhållande till den enskilda försöksytan, det enskilda beståndet etc. Provträden skola nu representera ett ändligt antal träd, och uppstå därigenom vissa skiljaktigheter i den matematiska behandlingen. Medelfelsformlernas fordran på ett oändligt antal framhålles också i UDO MÜLLERS bekanta Lehrbuch der Holzmesskunde (1915, sid. 270), men drages därav den oriktiga slutsatsen att problemet ej kan matematiskt lösas.

Antag att stamantalet på en försöksyta är  $\sum p_j + \sum p_i$ , där  $\sum p_i$  äro de objektiva uttagna och höjdmätta provträden. Träden förutsättas här liksom i det föregående sammanförda i 1-cm-klasser (resp.  $j$  och  $i$ ). Genom numerisk utjämning av provträdens höjder ( $y_i$ ) erhålles enligt det föregående höjdkurvan:  $y = a + \beta x + \gamma x^2$ , där  $a$ ,  $\beta$  och  $\gamma$  äro närmevärden på de obekanta parametrarna  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Vid beräkandet av försöksytans kubikmassa antages för enkelhetens skull, att provträden kuberar separat med ledning av de uppmätta höj-

derna och sålunda ej förorsaka något från höjdkurvan härledande fel i försöksytans kubikmassa. De återstående ( $\sum p_j$ ) träden, vars höjder ( $y_j$ ) äro obekanta, kuberas med hjälp av höjdkurvan, och blir deras kubikmassa med användande av samma beteckningar som i det föregående:

$$W = \sum_j p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2).$$

Det gäller att uppskatta medelfelet ( $\varepsilon_W$ ) i detta närmevärde i förhållande till de enskilda träden.

Antag först att de exakta värdena på  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och  $\sigma$  äro kända. Ersättes då den obekanta höjden  $y_j$  med sitt medelvärde  $a + bx + cx^2$ , erhålles ett närmeuttryck, vars medelfel blir:

$$\sigma \sqrt{\sum_j p_j (f_j x_j^2)^2}$$

Vi förfoga emellertid endast över närmevärdet:

$$W_j = \sum_j p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2).$$

Till kvadraten på det förut angivna medelfelet måste därför adderas en term, som hänför sig till osäkerheten i  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Denna term är tydligen kvadraten på medelfelet i förhållande till variationstypen ( $\varepsilon_V$ ) (formel 12 sid. 45).

Vi få således följande slutformel:

$$\varepsilon_W = \sigma \sqrt{Q^2 + T^2} \dots \dots \dots (16)$$

där  $Q^2 = \sum_j p_j (f_j x_j^2)^2$

och  $T^2 = \frac{1}{A} (A_{00} t_0^2 + A_{11} t_1^2 + A_{22} t_2^2 + 2 A_{01} t_0 t_1 + 2 A_{02} t_0 t_2 + 2 A_{12} t_1 t_2)$

Övergå vi nu till procentuella medelfel blir:

$$\varepsilon'_W = \sqrt{\varepsilon'_Q{}^2 + \varepsilon'_V{}^2} \dots \dots \dots (17)$$

där  $\varepsilon'_Q{}^2 = \left( \frac{100 \cdot \sigma \cdot Q}{W} \right)^2 = (100 \cdot \sigma)^2 \cdot \frac{\sum_j p_j (f_j x_j^2)^2}{\left[ \sum_j p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2) \right]^2}$  och

$\varepsilon'_V$  det procentuella medelfelet i förhållande till variationstypen enligt det föregående.

Av uttrycket för  $\varepsilon'_Q{}^2$  framgår att detta går mot noll, då  $j$  går mot  $\infty$  (jfr även tab. 18). Talen  $f_j x_j^2$  (det enskilda trädets grundyta  $\times$  formtalet) äro små, varför  $\varepsilon'_Q{}^2$  vid större  $j$ -värden (stamantal) kan negligeras, och sålunda blir då medelfelet  $\varepsilon'_W$  approximativt lika med medelfelet i förhållande till variationstypen.

Vid den teoretiska deduktionen antogs, att provträden ( $x_i$ ) kuberades separat med ledning av de ej utjämnade höjdmätningarna, och sålunda ingingo med sina mätta värden i kubikmassan. Men i verkligheten kuberades ju dessa efter sina utjämnade värden — höjdkurvan. Skillnaden i kubikmassa mellan de båda förfaringssätten bör emellertid på grund av principen för höjdkurvans utjämning bli obetydlig.

Tab. 17.

Försöksyta Versuchsfläche  N:r	Antal träd Anzahl Bäume	Kubikmassa m <sup>3</sup> Kubikinhalte m <sup>3</sup>		Differens Differenz	
		Enl. höjdmätning Nach Höhenmessung	Enl. höjdkurva Nach Höhenkurve	m <sup>3</sup>	%
Sf 17: I .....	124	40,377	40,349	— 0,028	— 0,07
Sf 50: II .....	20	2,025	2,024	— 0,001	— 0,05
Sf 50: IV .....	231	18,880	18,881	+ 0,001	+ 0,005
Sf 50: IV .....	20	2,099	2,100	+ 0,001	+ 0,005

Ytorna i tab. 17 ha kuberats 1-cm klassvis och med användande av samma formlar dels efter höjdmätningarna, och dels efter höjdkurvan. Differensen är som synes mycket liten och försummas i det följande.

Enligt formel 17 har medelfelet ( $\varepsilon'_w$ ) uträknats för fem försöksytor dels med 20 provträd för höjdkurvan, dels med 60 (tab. 18). Medelfelet ( $\varepsilon'_w$ ) på de ej höjdmätta trädens kubikmassa ( $W_j$ ) har dessutom uttryckts i procent av hela ytans kubikmassa ( $W_{j+i}$ ), vari sålunda de höjdmätta provträdens kubikmassor ingå.

Av tab. 18 framgår att medelfelet i procent av totala kubikmassan här varierar mellan 1,28—2,00 % vid 20 provträd och mellan 0,58—1,10 % vid 60 samt genomgående är lägre än medelfelet i förhållande till variationstypen ( $\varepsilon'_v$ ). Vid större stamantal blir dock skillnaden obetydlig och kan försummas (jfr sf 56). Det ovan påpekade förhållandet att  $\varepsilon'_q$  sjunker med stigande stamantal verifieras. Följaktligen sjunker även differens  $\varepsilon'_w - \varepsilon'_v$  och bli tydliggen medelfelen i förhållande till variationstypen och den enskilda ytan vid större stamantal approximativt lika, såvida ej provstamantalet ökas i samma eller större proportion. För uppskattningar i praktiken kan därför i regel medelfelet i förhållande till variationstypen ( $\varepsilon'_v$ ) med god approximation överföras att gälla uppskattningsobjektet som ett uttryck för den sökta säkerheten. Detta är ur beräkningssynpunkt värdefullt, emedan medelfelet  $\varepsilon'_v$  kan härledas mera generellt för olika variationstyper oberoende av det stamantal som skall uppskattas (jfr tab:na 15 och 16).

Tab. 18. Medelfelet i kubikmassan på grund av höjdkurvans osäkerhet i förhållande till den enskilda försöksytan.  
Der mittlere Fehler des Kubikinhalts wegen der Unsicherheit der Höhenkurve im Verhältnis zu der einzelnen Versuchsfläche.

Försöksyta Versuchsfläche	Trädslag Baumart	Behandling Behandlung	Antal träd å ytan Anzahl Bäume in der Fläche	Antal prov träd Zahl der Probestämme							
				20				60			
				$\epsilon'_q$	$\epsilon'_V$	$\epsilon'_W$	Medelfelet i % av ytans kubikmassa Der mittlere Fehler in % von dem Kubikinhalt der Fläche $\left(\epsilon'_W \cdot \frac{W_j}{W_{j+i}}\right)$	$\epsilon'_q$	$\epsilon'_V$	$\epsilon'_W$	Medelfelet i % av ytans kubikmassa Der mittlere Fehler in % von dem Kubikinhalt der Fläche $\left(\epsilon'_W \cdot \frac{W_j}{W_{j+i}}\right)$
N:r											
Sf 17: I.....	Tall Kiefer	Extra stark läggallring Extra starke Niederdurchforstung	124	$\pm 0,61$	$\pm 1,39$	$\pm 1,52$	$\pm 1,28$	$\pm 0,78$	$\pm 0,81$	$\pm 1,12$	$\pm 0,58$
27: I.....	Tall Kiefer	Stark läggallring Starke Niederdurchforstung	183	$\pm 0,52$	$\pm 1,57$	$\pm 1,66$	$\pm 1,48$	$\pm 0,67$	$\pm 0,91$	$\pm 1,13$	$\pm 0,69$
Sf 50: II .....	Tall Kiefer	Extra stark läggallring Extra starke Niederdurchforstung	203	$\pm 0,62$	$\pm 1,84$	$\pm 1,95$	$\pm 1,75$	$\pm 0,69$	$\pm 1,06$	$\pm 1,27$	$\pm 0,89$
Sf 50: IV .....	Tall Kiefer	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	231	$\pm 0,65$	$\pm 2,12$	$\pm 2,21$	$\pm 2,00$	$\pm 0,73$	$\pm 1,25$	$\pm 1,45$	$\pm 1,07$
Sf 56: I.....	Gran Fichte	Stamvis blädning Plenter	463	$\pm 0,43$	$\pm 2,02$	$\pm 2,06$	$\pm 1,97$	$\pm 0,46$	$\pm 1,17$	$\pm 1,26$	$\pm 1,10$

För försöksytor med ringa stamantal och stort provträdsantal kan givetvis ej denna approximation göras (jfr tab. 18 sf 17<sup>1</sup> med 60 provträd), utan bör medelfelet i ett aktuellt fall bestämmas i enlighet med här använt tillvägagångssätt.

Vi ha i det föregående vid kubikmassans beräkning använt 1-cm klassindelning för diametern och räknat med klassens aritmetiska medeldiameter och motsvarande höjd och formtal från de utjämnade kurvorna. De härledda medelfelen hänföra sig därför endast approximativt till de enskilda träden. Klassens medeldiameter blir tydligen något för låg och följaktligen även dess höjd, men formalet något för högt.

Tab. 19.

Försöksyta Versuchsfläche  N:r	Antal träd  Anzahl Bäume	Kubering enl. höjdkurva Kubierung nach der Höhenkurve		Differens Differenz	
		Individuellt Individuell	1 cm klassvis In 1 cm-klassen	m <sup>3</sup>	%
Sf 17: I .....	124	40,371	40,349	— 0,022	— 0,05
Sf 50: II .....	202	20,332	20,314	— 0,018	— 0,09
Sf 50: IV .....	231	28,887	18,881	— 0,006	— 0,03

Av tab. 19 framgår att skillnaden mellan den individuella och klassvisa kuberingen kan negligeras.

## KAP. VII. Provträdens fördelning.

I denna undersökning ha provträden uttagits diameterklassvis efter viss konstant kvot (vart *n*:te träd), som varande en enkel och i regel praktiskt användbar, objektiv metod. Härmed vare ej sagt, att denna metod är den effektivaste fördelning av provträden med hänsyn till kubikmassans säkerhet. Snarare kan förväntas vissa brister i nämnda avseende. Det torde emellertid kunna förutsättas, att en teoretiskt riktig fördelning i praktiken endast kan få karaktären av ett steg i rätt riktning på grund av bristande kännedom i förväg om uppskattningsobjektet och sålunda i hög grad beroende på taxators skicklighet (jfr det följande). Under sådana förhållanden har det ansetts lämpligt att grunda medelfelsberäkningarna på ovannämnda metod, varigenom ej riskeras en underskattning av medelfelet.

Provträdens fördelning är ur teoretisk synpunkt ett intressant matematiskt problem. Vid den praktiska tillämpningen äro emellertid möjligheterna starkt begränsade, varför provträdsfördelningen här behandlas



mera schematiskt och diskussionsvis i anslutning till vid undersökningen framkomna resultat.

Av undersökningen har framgått att under i övrigt jämförbara förhållanden medelfelet i kubikmassan genomgående är större för krongallrings-tytor än för låggallrings-tytor vid här använt sätt för provträdens uttagande (jfr formlerna 14 och 15 sid. 48). På grund av den stora stamfrekvensen i de lägre diameterklasserna vid krongallringstyp blir höjdkurvan säkrare bestämd för dessa än vid låggallring, under det att för de grövre klasserna förhållandet är omyönt. Stamantalet är uppenbarligen ej den effektivaste fördelningsgrunden.

Vi utgå ifrån följande schematiska exempel. Kubikmassan i ett bestånd är:

$$V = f_1 x_1^2 y_1 + f_2 x_2^2 y_2 \dots f_j x_j^2 y_j$$

där 1, 2 . . . j äro godtyckliga diameterklasser. För j:te klassen är:

$$\begin{aligned} \text{produkten av stamantal, formtal och } \frac{\pi}{4} &= f_j \\ \text{medeldiametern} &= x_j \\ \text{medelhöjden} &= y_j \\ \text{antalet höjdprovsträd} &= n_j \end{aligned}$$

För varje klass för sig och oberoende av de övriga utjämnas provträdens höjder medelst en rät linje samt avläses medeldiameterns höjd

( $y_j$ ). Dess medelfel blir då  $\epsilon_{y_j} = \frac{\sigma_j}{\sqrt{n_j}}$  och medelfelet i kubikmassan:

$$\epsilon_V^2 = (f_1 x_1^2)^2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1} + (f_2 x_2^2)^2 \cdot \frac{\sigma_2^2}{n_2} \dots (f_j x_j^2)^2 \frac{\sigma_j^2}{n_j}$$

Provträden ( $n_1 n_2 \dots n_j$ ) skola tydligen så fördelas att  $\epsilon_V^2$  blir ett minimum.

$$\epsilon_V^2 = \min = S$$

Sätt:

$$n_1 + n_2 + n_3 \dots n_j = N$$

$$k^2 n_1 + k^2 n_2 + k^2 n_3 \dots k^2 n_j - k^2 N = 0$$

$$\epsilon_V^2 = (f_1 x_1^2)^2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1} + k^2 n_1 + (f_2 x_2^2)^2 \frac{\sigma_2^2}{n_2} + k^2 n_2 \dots (f_j x_j^2)^2 \frac{\sigma_j^2}{n_j} + k^2 n_j - k^2 N = S$$

$$\frac{\partial S}{\partial n_1} = - (f_1 x_1^2)^2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1^2} + k^2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial n_2} &= -(f_2 x_2^2)^2 \cdot \frac{\sigma_2^2}{n_2^2} + k^2 \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial S}{\partial n_j} &= -(f_j x_j^2)^2 \cdot \frac{\sigma_j^2}{n_j^2} + k^2 \\
 k &= \frac{f_1 x_1^2 \sigma_1}{n_1} = \frac{f_2 x_2^2 \sigma_2}{n_2} \dots \dots \frac{f_j x_j^2 \sigma_j}{n_j} \\
 n_1 &= \frac{f_1 x_1^2 \sigma_1}{k}, n_2 = \frac{f_2 x_2^2 \sigma_2}{k}, \dots \dots n_j = \frac{f_j x_j^2 \sigma_j}{k}; \\
 \frac{f_1 x_1^2 \sigma_1}{k} + \frac{f_2 x_2^2 \sigma_2}{k} \dots \dots \frac{f_j x_j^2 \sigma_j}{k} &= N \\
 \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \dots \dots \sigma_j &\text{ approx. (enl. det föreg.)} \\
 k &= \frac{\sigma \sum_j f_j x_j^2}{N}; \\
 n_1 &= \frac{f_1 x_1^2}{\sum_j f_j x_j^2} N; n_2 = \frac{f_2 x_2^2}{\sum_j f_j x_j^2} N; \dots \dots n_j = \frac{f_j x_j^2}{\sum_j f_j x_j^2} N; \\
 n_1 : n_2 : n_3 \dots \dots &= f_1 x_1^2 : f_2 x_2^2 : f_3 x_3^2 \dots \dots
 \end{aligned}$$

(Jfr TISCHENDORF 1924.)

D. v. s. provstammarnas antal i klasserna förhålla sig som produkten av formtal och grundyta. Detta gäller emellertid endast under den schematiska förutsättningen att provstammarna utjämnas klassvis för sig. Utjämnas de som vanligt med en gemensam kurva och enligt här använd numerisk metod, bli emellertid de mellersta klasserna relativt säkrare bestämda än flyglarna (jfr fig. 7 och 10 samt sid. 35). Vid den grafiska utjämnningen hava vi för de lägre diameterklasserna stor ledning av skärningspunkten på  $y$ -axeln (brösthöjden 1,3 m), varför det närmast gäller att fördela provträden så att de grövre klasserna bli något mer representerade än i förhållande till  $fx^2$ . Av praktiska skäl måste indelningsgrunden vara enhetlig och ansluta sig till faktorer om vars fördelning vi kunna bilda oss en uppfattning, såsom stamantal, grundyta och kubikmassa. Vi utgå därför ifrån att vid effektiv fördelning av provträden deras antal skola förhålla sig som kubikmassorna, d. v. s.

$$n_1 : n_2 : n_3 \dots \dots = f_1 x_1^2 y_1 : f_2 x_2^2 y_2 : f_3 x_3^2 y_3 \dots \dots$$

För att kunna fördela provträden efter denna grund måste provträds-kvoten göras variabel och blir graden härav beroende på uppskattningens ändamål och metodik. Det är givet att ju mera arbete, som nedlägges på den individuella mätningen av provträden, ju mera arbete bör också nedläggas på deras effektiva uttagande. Vid precisionsmätning för vetenskapliga ändamål, ev. förenad med noggrannare formbestämning, kan sålunda mera förarbete göras för provträdens uttagande än vid uppskattning för praktiska ändamål. Innan vi övergå till att diskutera den variabla provträdskvotens bestämmande, skola vi i ett par konkreta fall studera dess effekt.

För försöksytorna 27<sup>I</sup> och sf 50<sup>IV</sup> ha 60 provträd uttagits på tre olika sätt: 1) 60 st. efter viss konstant kvot, 2) 50 st. efter viss konstant kvot och därtill de 10 grövsta, 3) 60 st. efter tre olika kvoter, så att 15 träd representera 25 % av kubikmassan från lägsta dimension, 30 st. för intervallet 25—75 % samt 15 st. för intervallet 75—100 %. Resultatet har sammanställts i tab. 20, varjämte för yta sf 50<sup>IV</sup> höjdkurvans säkerhet vid de olika metoderna demonstreras av fig. 7.

Tab. 20. Jämförelse mellan olika metoder för provträdens uttagande.  
Vergleichung zwischen verschiedenen Methoden für die Ausnehmung der Probestämme.

Försöksyta Versuchsfläche	Behandling Behandlung	Medelfelet i % av kubikmassa ( $\varepsilon_p$ ) Der mittlere Fehler in % vom Kubikinhalte ( $\varepsilon_p$ )		
		60 provträd efter konstant kvot 60 Probestämme nach konstanter Quote	50 provträd efter konstant kvot + de 10 grövsta 50 Probestämme nach konstanter Quote + die 10 stärksten	60 provträd fördelade enligt kubikmassan efter 3 kvoter 60 Probestämme gemäss dem Kubikinhalte nach 3 Quoten verteilt
N:r				
27: I .....	Stark låggallring Starke Niederdurchforstung	$\pm 0,91$	$\pm 0,84$	$\pm 0,79$
Sf 50: IV ...	Extra stark krongallring Extra starke Hochdurchforstung	$\pm 1,25$	$\pm 1,16$	$\pm 1,08$

Som var att vänta, är skillnaden mellan de olika metoderna mest framträdande vid krongallringstypens stamfördelning. De framkomna differenserna kunna förefalla obetydliga men böra ses mot de provstamsantal, som erfordras för deras erhållande. Sålunda måste antalet provträd ökas från 60 till 80 för att sänka medelfelet ( $\varepsilon_p$ ) från 1,25—1,08 %, om samma metod (vart n:te) bibehålles. En rätt fördelning av provträden är således ett ej betydelselöst moment, då det gäller att med minsta möjliga medel uppnå erforderlig säkerhet.

Den i ovannämnda exempel anförda metoden med en konstant kvot och därtill ett visst antal av de grövsta träden, räknade bakifrån i stam-

räkningslistan, användes f. n. vid försöksanstalten och kan för jämna försöksytor anses vara ett steg i rätt riktning. Metoden är endast användbar, då provträden tagas efter stamräkningen.

Vid precisionsuppskattningar för vetenskapliga behov med samtidig formbestämning och höjdmätning torde provträden lämpligen uttagas efter tre kvoter representerande  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  av kubikmassan i enlighet med det demonstrerade exemplet. Kvoterna kunna erhållas från erfarenhetstal på stamantalets och kubikmassans fördelning (jfr tab:na 9 och 10). De tre provträdskvoterna komma tydligen också att representera naturliga stamklasser. Även för försöksytor bör emellertid nedan nämnda enklare metod ofta vara tillfyllest.

Vid varje provträdstagning efter viss kvot i samband med stamräkningen måste man bilda sig en uppfattning om antalet träd, som skall uppskattas, för att genom kvoten erhålla för önskad säkerhet erforderligt provträdsantal. Känner man dessutom stamantalets och kubikmassans procentuella fördelning på båda sidor om en viss diameter, kunna två kvoter fastställas. För detta ändamål är medeldiametern lämplig på grund av sitt fixerade läge i stamfrekvensserien. Enl. tab. 10 ligger under medeldiametern 55—61 %, eller avrundat, 60 % av stamantalet räknat från minsta dimension. För kubikmassan äro motsvarande siffror enl. tab. 9 och avrundade för tall 30—40 %, och för gran 15—40 %, varvid den lägre siffran avser kron-gallring. Dessa siffror äro givetvis ej allmängiltiga, vilket tidigare framhållits (sid. 32), men kunna dock vara till ledning. Som kvoterna alltid måste vara avrundade tal, erfordras här ej heller några exakta siffror. Gången skulle alltså bli, att provträden fördelas på båda sidor om den bedömda medeldiametern i samma förhållande som kubikmassan, och med kännedom om stamantalets fördelning erhållas då två provträdskvoter.

Det är givet, att vid tillämpning utanför mer eller mindre schematiserade försöksytor svårigheter uppstå vid bedömande av medeldiametern samt kubikmassans fördelning kring densamma. Schemata och typer måste då ersättas av taxators omdöme. Men som underlag för detta omdöme bör en teoretiskt riktig tankegång ej underskattas.

Provträdens uttagande efter kvot måste ur ren uppskattningssynpunkt anses tillförlitligare än genom provträdsytor, medan dimensionerna i förra fallet bli bättre representerade. Av organisatoriska skäl kan emellertid den senare metoden ej sällan vara motiverad. Samma tankegång med avseende på provträdens fördelning kan då fullföljas, genom att de grövre träden tagas å hela ytan, men de klenare endast å viss del av densamma, vilket bl. a. tillämpats vid riksskogstaxeringen.

### KAP. VIII. Om representativa provträd.

De tillfälliga uppskattningsfelen kunna indelas i tre grupper: representationsfel hos provytan ( $\epsilon_{ry}$ ), hos provträden ( $\epsilon_{rt}$ ) samt mättningsfel ( $\epsilon_m$ ). Det totala medelfelet i kubikmassan blir då:

$$\sqrt{\epsilon_{ry}^2 + \epsilon_{rt}^2 + \epsilon_m^2}$$

Härtill komma systematiska fel och bearbetningsfel.

För att bestämma ett fel är det nödvändigt att veta vad som är rätt, och i detta fall således skall representeras. Vid uppskattning för praktiska ändamål är det givet, att denna skall avse det aktuella beståndet, skogen etc., men för försöksväsendet ligger saken ej så enkelt till.

Osökt inställer sig här frågan, huruvida uppskattningsresultatet skall hänföra sig till den enskilda försöksytan eller den variationstyp, denna representerar. Tänka vi oss en egenskap, vilken som helst, hos träd-individen i ett bestånd, karakteriseras den av ett medelvärde samt en variation kring detta medelvärde (medelavvikelse,  $\sigma$ ), vilka bestämmas av trädens biologiska egenskaper, ståndortsförhållanden, samt behandlingsform. Skall nu inverkan av exv. en viss behandlingsform under i övrigt identiska förhållanden studeras och kvantitativt fixeras genom jämförande försök, är det uppenbart, att vi måste hänföra uppskattningsresultatet till variationstypen för att med säkerhet veta, om effekten kan tillskrivas en bestämd orsak (behandlings-sättet) och ej endast är en yttring av variationen. Detsamma gäller tydligen även försöksytor vid produktionsundersökningar för erfarenhetstabeller.

Detta innebär givetvis ej någon förändring av själva uppskattningen, utan endast att denna anges med en säkerhetsbestämning, som hänför sig till variationstypen och ej till den enskilda försöksytan.

Om således försöksytan vid exv. jämförande gallringsförsök och produktionsundersökningar skall representera variationstypen, är detsamma följaktligen även fallet med provträden för höjd och form. Preliminära undersökningar över formtalets variation ha gett vid handen, att denna är av samma storleksordning som för höjden, och då formtalskurvans medelfelsbestämning kan göras analogt med höjdkurvans, torde därför de för höjdkurvan meddelade siffrorna även ge en föreställning om det ungefärliga provträdsantal, som erfordras för formens bestämmande.

Av undersökningen har framgått att för vetenskaplig forskning nödvändig säkerhet stora provträdsantal erfordras. (Jfr tab. 15.) Härav följer också att en uppskattningsmetod, som vid den praktiska tillämpningen endast kan grundas på ett mycket begränsat

provträdsantal, ur ren beståndsuppskattningssynpunkt är tämligen värdelös, även om den uppskattar de enskilda träden exakt. Vid bedömande av en uppskattningsmetods värde måste en viktig synpunkt vara, huruvida den tillåter att erforderligt antal provträd tagas.

Kännedomen om skogens stora variationsförmåga torde vara den allmännaste och säkraste kunskap vi äga om densamma, ehuru denna kunskap som variation betraktad är mycket ofullständig. Det är därför ägnat att förvåna, att även under de allra senaste åren uppskattningsmetoder (speciellt tyska) framkommit, som vila på ett mycket begränsat antal fällda medelträd (10—12) fördelade på några få klasser (vanl. 3). Dessa medelträds brösthöjdsdiameter beräknas visserligen med stor noggrannhet för att sedan uppsökas och fällas, varvid även ledning toges av upplagd höjdkurva, men måste dock på grund av den stora variationen formtalsbestämningen bli mycket osäker.

### SAMMANFATTNING.

Föreliggande undersökning utgör ett led i de studier över våra uppskattningsmetoders noggrannhet, som bedrivs vid försöksanstalten. Den avser, dels att klarlägga de beräkningsmetoder, efter vilka i ett aktuellt fall med ledning av observationsmaterialet höjdkurvans osäkerhet och därifrån härledande fel i kubikmassan kan bestämmas, dels att genom konkreta exempel ge en uppfattning om det provträdsantal, som erfordras vid uppskattning av försöksytor och bestånd för att uppnå viss säkerhet, angiven som medelfel, i nämnda avseende.

På grund av det skogsbiologiska variationsgebitets karaktär av tämligen oplöjd mark har i undersökningen ingått en mera detaljerad statistisk analys av materialet, varav framgått att sannolikhetskalkylens teoretiska förutsättningar med god approximation äro uppfyllda. De härvid framkomna resultaten äro emellertid av mera teoretiskt intresse. Över undersökningens viktigaste praktiska resultat hänförda till i materialet förekommande beståndstyper (tab. 1) kan följande sammanfattning lämnas:

Försöksytor.<sup>1</sup> För att uppnå 1 % medelfel på medelhöjden, bestämd som medeldiameterens höjd å höjdkurvan, erfordras 40—155 samt för 2 % 10—40 provträd (tab. 12). — För att erhålla 1 % medelfel på kubikmassan, då endast hänsyn toges till höjdkurvans osäkerhet och kuberingen sker 1-cm klassvis erfordras 25—110 samt för 2 % 7—30 provträd (tab. 15).

Bestånd.<sup>2</sup> Motsvarande siffror äro för 1 % medelfel på me-

<sup>1</sup> Höjdmätningssinstrument: teodolit.

<sup>2</sup> Höjdmätningssinstrument: Christens höjdmätare.

delhöjden 75—250 och för 2 % 20—60 provträd (tab. 14) samt för 1 % på kubikmassan under ovanstående förutsättningar 55—180 och för 2 % 15—45 provträd (tab. 16).

Provträden förutsättas uttagna efter viss konstant kvot (vart  $n$ :te träd).

Det angivna medelfelet hänför sig till den variationstyp, försöksytan eller beståndet representerar. För de stora stamantal, varom det är fråga vid beståndsuppskattning i praktiken, sammanfaller detta medelfel approximativt med medelfelet hänfört till det uppskattade beståndet.

För försöksytor med ringa stamantal är medelfelet i förhållande till variationstypen större än felet i förhållande till den uppskattade ytan (tab. 18), och kan det senare felet beräknas för varje särskild kombination av totalt stamantal och provträdsantal enl. formel 16.

Empiriska närmeformler för medelfelet på medelhöjden och kubikmassan ha härletts för överslagsvisa kalkyler med ledning av medelavvikelsen från den grafiskt utjämnade höjdkurvan. Provträden förutsättas uttagna som vart  $n$ :te träd. (Formlerna: 10, 11, 14, 15.)

Provträden skola, för att vid givet antal approximativt ge minsta möjliga medelfel, fördelas på diameterklasserna i förhållande till dessas kubikmassor, och blir då provträdiskvoten variabel.

Stamantalets och kubikmassans fördelning har närmare undersökts på 36 likåldriga försöksytor (tab:na 9 och 10, fig. 8, 9).

Medeldiametern visar ett väl fixerat läge i stamfrekvensserien. Sålunda ligger för tall och gran samt oberoende av behandlingsform c:a 60 procent av stamantalet, räknat från minsta dimension, under medeldiametern. Inom kubikmassan är läget mera variabelt. För tall är motsvarande procent 30—40 och för gran 15—40, varvid de lägre siffrorna avse låggallrings- och de högre krongallringsytor.

För uppskattningar i praktiken torde ej mer än två provträdiskvoter med fördel kunna användas och då lämpligen en för diameterklasserna under och en för klasserna över medeldiametern. Provträden fördelas på båda sidor om medeldiametern i samma förhållande som kubikmassan, och med ledning av stamantalets fördelning kring medeldiametern bestämmas provträdiskvoterna. Medeldiametern samt stamantalets och kubikmassans fördelning kring densamma kunna med för detta ändamål erforderlig noggrannhet okulärt bedömas.

---

Litteraturförteckning.

- CAJANUS, WERNER, 1914, Über die Entwicklung gleichaltriger Waldbestände. Helsingfors.
- CHARLIER, C. V. L., 1920, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Lund.
- CRAMÉR, HARALD, 1926, Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar. Stockholm.
- CZUBER, EMANUEL, 1891, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig.
- FISCHER, PAUL B., 1921, Determinanten. Sammlung Göschen.
- HAGELBERG, VIKTOR, 1918, Om massafaktorernas och kubikmassans fördelning kring medelstammen. Skogsvårdsför. tidskrift.
- HELMERT, F. R., 1907, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig und Berlin.
- JORDAN, WEIL, DR. W., 1920, Handbuch der Vermessungskunde, Erster Band. Stuttgart.
- LÖNNROTH, ERIK, 1925, Untersuchungen über die innere Struktur und Entwicklung, gleichaltriger naturnormaler. Kiefernbestände. Acta forestalia Fennica 30. Helsinki.
- MILLS, FREDERICK, C., 1925, Statistical Methods. London.
- MÜLLER, UDO, 1915, Lehrbuch der Holzmesskunde. Berlin.
- PETTERSON, HENRIK, 1926, Studier över stamformen. Medd. från Statens Skogsförsöksanstalt, h. 23, N:o 2.
- SCHOTTE, GUNNAR, 1912, Om gallringsförsök. Medd. från Statens Skogsförsöksanstalt, h. 9.
- TISCHENDORF, WILHELM, 1925, Die Genauigkeit von Messungsmethoden und Messungsergebnissen bei Holzmassenermittlung. Forstwissenschaftliches Centralblatt 47. Berlin.
- , 1926, Numerische Ausgleichung forstlicher Zuwachskurven, insbesondere bei der Aufstellung von Ertragstafeln. Forstwissenschaftliches Centralblatt 48. Berlin.
- , 1927, Lehrbuch der Holzmassenermittlung. Berlin.
- WHITTAKER and ROBINSON, 1924, The calculus of observations. London.



## RESÜMEE.

### Die Anzahl der Probestämme und die Genauigkeit der Höhenkurve.

#### Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung bezweckt, eine Vorstellung von der Anzahl der Probestämme zu geben, die bei Abschätzung von Versuchsflächen und Beständen erforderlich ist, damit der Fehler in der Kubikmasse wahrscheinlich nicht eine bestimmte Grösse überschreiten soll, wenn nur die Unsicherheit der Höhenkurve berücksichtigt wird. Systematische Fehler der Höhenmessungen und sonstige Fehlerquellen werden hierbei als eliminiert vorausgesetzt.

Es ist notwendig, zu wissen, was als der wahre Wert betrachtet werden soll, um die Grösse eines Fehlers bestimmen zu können. Wir begnügen uns hier damit, zu konstatieren, dass der wahre Wert teils die einzelne Fläche und teils der Variationstypus, den die Fläche repräsentiert, sein kann. Für das Versuchswesen muss das Resultat der Abschätzung gewöhnlich sich auf den Variationstypus beziehen. Dies wird in Kapitel VI näher diskutiert.

Die Behandlung der vorliegenden Aufgabe hängt davon ab, wie die Probestämme entnommen werden. Die Auswahl der Probestämme kann sowohl subjektiv als objektiv unter den Stämmen in der Versuchsfläche oder dem Bestand geschehen. Die Vorzüge der objektiv ausgewählten Probestämme sind von H. PETERSON (1926) mit Schärfe betont worden. Von diesen wird hier nur angeführt, dass die objektive Methode statistisch repräsentative Probestämme gibt, wodurch es möglich ist, auf Grund des Beobachtungsmaterials die Sicherheit der Höhenkurve zu berechnen und die Anzahl der Probestämme dem Bedürfnis anzupassen. Die subjektive Methode bietet keinen so generellen Berechnungsgrund dar. Im folgenden wird vorausgesetzt, dass die Probestämme nach einer objektiven Methode entnommen werden, was für wissenschaftliche Zwecke notwendig und für praktische Bedürfnisse, wenn die Anzahl nicht zu gering ist, in Regel das zuverlässigste ist.

#### KAP. I. Allgemeine Richtlinien für die Untersuchung.

Es liegt nahe zu versuchen den mathematischen Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Aufgaben von vorliegender Art anzuwenden. Hierbei muss man sich jedoch darüber klar sein, dass die Wahrscheinlichkeitsformeln auf rein mathematischem Grunde ruhen und also gewisse bestimmte Voraussetzungen fordern. Die mathematischen Gesetze gelten bei Anwendung auf die Wirklichkeit nur innerhalb gewisser empirisch gefundener Grenzen. Ihre Anwendbarkeit kann nicht bewiesen, sondern nur verifiziert werden.

Bei der mathematischen Behandlung von praktischen Aufgaben müssen wir das Untersuchungsobjekt schematisieren, um die Voraussetzungen der Sätze,

auf welche die theoretische Berechnung sich gründen muss, zu erfüllen. Wir erhalten dann ein mehr oder weniger abstraktes Bild von der Wirklichkeit. Der Grad der Schematisierung wird ausschlaggebend für den praktischen Wert des Kalküls. Darum ist es notwendig, das Material im Bezug auf diese Voraussetzungen näher zu studieren. Bei einer solchen Analyse muss das Material reingezüchtet werden, so dass die erforderlichen Voraussetzungen mit geringstem Grad von Approximation vorhanden sind. Dann wird es zu einer Urteilsfrage, inwieweit das Resultat des Kalküls generalisiert und auf die ursprüngliche Erscheinung übertragen werden darf. Setzt man das Ursprungsmaterial direkt in den mathematischen Apparat ein, so werden Fehlerquellen eingeführt, die schwer zu überschauen sind, weil die Mathematik blind nach gegebenen Voraussetzungen arbeitet.

Im nächsten Kapitel werden die Resultate der statischen Analyse des Untersuchungsmaterials vorgelegt.

## KAP. II. Statistische Analyse des Materials.

Das Material besteht aus 16 Versuchsflächen, von denen in 14 sämtliche Bäume einer Baumart (116—593 St.) genau mit Theodolit höhengemessen und in jeder von den zwei übrigen repräsentative Probestämme nach einer gewissen Quote (jeder n:te Baum) ausgewählt worden sind. Ausserdem sind genau mit dem Höhenmesser von Christen gemessene, repräsentative Probestämme aus gleichaltrigen Beständen in dem Versuchspark Siljansfors bearbeitet worden. Über das Material findet sich eine Beschreibung in Tab. 1, S. 4. Die Baumartmischung ist in Zehnteln der Kubikmasse angegeben worden. Für sämtliche Versuchsflächen und Bestände mit Ausnahme der Fläche Sf 32 ist die Hauptbaumart höhengemessen worden. Die in der Fläche Sf 32 höhengemessene Fichte geht mit etwa 80 % der Stammzahl in dem Niederbestand — 3:e und 4:e Kronenschicht (SCHOTTE 1912) — ein.

Die erste Voraussetzung einer mathematischen Behandlung der Höhenkurve ist eine Gleichung derselben. Es besteht eine charakteristische Verschiedenheit zwischen den Höhenkurven der Kiefer und der Fichte in gleichaltrigen, sowohl reinen als gemischten Beständen und Versuchsflächen, was durch Fig. 1, S. 7 demonstriert wird. Die Höhenkurve der Fichte hat gewöhnlich an dem Übergang zu den stark unterdrückten Durchmesserstufen einen Wendepunkt. Für die Flächen des Materials liegt dieser Punkt unter 6 cm. Es fehlt der Höhenkurve der Kiefer ein eigentlicher Wendepunkt.

Die niederen, stark unterdrückten Durchmesserstufen der Fichte (<6 cm) zeigen, was aus dem Folgenden hervorgehen wird, andere Kennzeichen und müssen deshalb bei einer Reinzüchtung des Materials weggelassen werden.

Es hat sich aus der Analyse ergeben, dass als ein genügender, mathematischer Ausdruck für die Höhenkurve der Kiefer und, oberhalb des Wendepunkts, auch der Fichte in gleichaltrigen Versuchsflächen eine numerische Ausgleichung der Gleichung:  $y = a + bx + cx^2$  nach der Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung kommen kann. ( $y$  = Höhe,  $x$  = Durchmesser bei Brusthöhe und  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Parameter).

Für die Flächen Sf 50<sup>IV</sup> und Sf 60 sind die Korrekursionsindizes:  $0,91 \pm 0,011$  bzw.  $0,97 \pm 0,004$ . Vergleiche auch Fig. 1 und 2, S. 7 und 8. In Tab. 2, S. 10, wird ein Vergleich zwischen der numerischen und der graphi-

schen Ausgleichung geliefert worden. Die graphische Ausgleichung ist in üblicher Weise ausgeführt worden.

Der Wahrscheinlichkeitskalkül gründet sich auf eine gesetzmässige Streuung — Variation — des Untersuchungsmaterials um den Mittelwert oder die Mittelkurve herum. Darum ist es nötig, diese Variation näher zu studieren.

In vorliegender Arbeit wird zwischen Streuung und Dispersion unterschieden. Unter Streuung ( $\sigma_s$ ) wird die mittlere Abweichung, — als die mittelquadratische Abweichung gemessen — eines gewissen Materials von seinem Mittelwert verstanden, und unter Dispersion ( $\sigma$ ) die durch das Material bestimmte Streuung des Variationstypus. Für Abweichung von der Höhenkurve werden die Formeln:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum' v^2}{N-3}},$$

wo  $v$  die Abweichung der einzelnen Variante bezeichnet und  $N$  die Anzahl der Varianten.

Für die Versuchsflächen in Fig. 3 und 4, S. 11 und 12 ist die Streuung um die numerisch ausgeglichene Höhenkurve in Durchmesserstufen mit 1 cm Weite ausgerechnet und teils in Meter (Streuung), teils in Prozent der mittleren Höhe der Durchmesserstufe (Variationskoeffizient) angegeben worden.

Die Streuung um die Höhenkurve ist für Kiefer von dem Durchmesser unabhängig (Fig. 3). Möglicherweise zeigt die Streuung in den schwächsten Durchmesserstufen der undurchforsteten Fläche Sf 50<sup>III</sup> eine Tendenz, mit sinkendem Durchmesser zu sinken. Betreffs der Fichte (Fig. 4) ist diese Tendenz für die schwächsten Durchmesserstufen ausgeprägt, aber von etwa 6 cm an und darüber ist die Streuung auch für die Fichte von dem Durchmesser unabhängig.

Aus Tab. 3, S. 13 geht hervor, dass die Streuung für sämtliche Durchmesserstufen 10—15 % kleiner als für die Stufen >6 cm ist. Die Wahrscheinlichkeitstheorie setzt voraus, dass keine Tendenz vorliegt. In den folgenden Rechnungen werden darum die Stufen <6 cm ausgeschlossen.

Es gilt nun zu untersuchen, ob die Dispersion von der Höhenkurve einer gewissen Verteilungsfunktion folgt. Dies ist durch Vergleich mit der Gausschen Wahrscheinlichkeitsfunktion geschehen. Die dabei benutzten Formeln finden sich in dem schwedischen Text, S. 15.

Aus Fig. 5 und Tab. 4, S. 14—15, sieht man, dass die Verteilung um die Höhenkurve annähernd der Gausschen oder normalen Wahrscheinlichkeitsfunktion folgt. Der Exzesskoeffizient ist für alle Flächen kleiner als sein Maximalfehler und hat wechselndes Zeichen. Es scheint daher kein Exzess vorzuliegen. Der Asymmetriekoeffizient ist nur in einer Fläche (Sf 56<sup>II</sup>) grösser als sein Maximalfehler, hat aber positives Zeichen für sämtliche Flächen, weshalb eine Tendenz zu positiver Asymmetrie verspürt werden kann (vergl. LÖNNROTH 1926). Die Anzahl gemessener Bäume ist jedoch zu klein, als dass ein geringerer Grad von Exzess oder Asymmetrie festgestellt werden könnte.

Wenn die Dispersion von der Höhenkurve genau einer gewissen Verteilungsfunktion folgt, können wir auch die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung zwischen gewissen bestimmten Grenzen angeben. Für die normale Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt bekanntlich z. B., dass 99,73 % der Abweichungen in-

nerhalb der Grenzen  $\pm 3\sigma$  liegen. Wenn aber die Verteilung nur annähernd eine normale ist, wird natürlich eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung, die die normale Funktion voraussetzt, mehr oder weniger unsicher.

Wir haben jedoch immer den Satz von TCHEBYCHEFF, welcher besagt; wenn der wahrscheinliche Wert (Mittelwert) und die Dispersion ( $\sigma$ ) einer statistischen Variable bekannt sind, ist die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung kleiner als  $k$ -mal die Dispersion grösser als

$$1 - \frac{1}{k^2}, \text{ d. h.}$$

$$k \cdot \sigma > 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Nach diesem generellen Satz liegen mehr als 88,9 % der Abweichungen innerhalb der Grenzen  $\pm 3\sigma$ . Hieraus geht hervor, dass die Dispersion (der mittlere Fehler) ein gutes Mass für die Variation oder die Unsicherheit von Näherungswerten ist.

### KAP. III. Die Genauigkeit der Höhenkurve.

#### *Mathematische Herleitung.*

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Kieferflächen und, abgesehen von den Stämmen schwächer als etwa 6 cm, Fichtenflächen des Materials annähernd folgende Voraussetzungen erfüllen, die Ausgangspunkt für die mathematische Bearbeitung werden.

Unter den Zuwachsbedingungen, die in einem gewissen Bestand (Versuchsfläche) vorhanden sind, wird von den Höhen ( $y$ ) der Bäume, deren Durchmesser bei Brusthöhe einen gegebenen Wert ( $x$ ) hat, angenommen, dass sie sich nach einer gewissen Verteilungsfunktion um einen Mittelwert, der durch die Gleichung:

$$y = a + bx + cx^2$$

ausgedrückt werden kann, verteilen. Die Dispersion ( $\sigma$ ) dieses Mittelwerts wird als von  $x$  unabhängig angenommen. Hierbei werden also  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\sigma$  in einem gewissen Bestand als konstant, aber nicht als numerisch bekannt vorausgesetzt.

Man hat die Durchmesser und Höhen an zusammen  $N$  Probestämmen, in  $n$  Stufen nach dem Durchmesser ( $x$ ) verteilt, gemessen. Für die  $i$ -te Stufe ist

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Probestämme} &= p_i \\ \text{der mittlere Durchmesser} &= x_i \\ \text{die mittlere Höhe} &= y_i \end{aligned}$$

Wenn von dem unbedeutenden Abrundungsfehler, der bei im folgenden angewandter Stufenweite (1 cm) in der Vereinigung aller Bäume der Stufe zu dem mittleren Durchmesser  $x_i$  liegt, abgesehen wird, so ist  $y_i$  als eine statistische Variable mit dem Mittelwert

$$M_{y_i} = a + bx_i + cx_i^2$$

und der Dispersion

$$\epsilon_{y_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$$

aufzufassen.

Die Gleichung  $y = a + bx + cx^2$  ist die Höhenkurve des Variationstypus, den die Versuchsfläche repräsentiert, und um die Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  exakt bestimmen zu können, sind eine unendliche Anzahl Probestämme erforderlich.

Die Aufgabe ist die, für einen beliebigen, gegebenen Wert von  $x$  auf Grund des Beobachtungsmaterials einen Näherungswert der mittleren Höhe  $a + bx + cx^2$  zu bilden und den Fehler dieses Näherungswertes zu schätzen.

Wir setzen  $y = a + \beta x + \gamma x^2$  und bezeichnen damit die Gleichung der Höhenkurve, die auf Grund des Materials bestimmt werden kann.  $a$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind dann Näherungswerte der unbekannten Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und können durch Ausgleichsrechnung für vermittelnde Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Bei der Auflösung der 3. Normalgleichungen ist die Determinantmethode nach in Tab. 5 und 6, S. 19 und 20 angegebenen Rechenschemata angewendet worden (WHITTAKER und ROBINSON 1924). Die Bezeichnungen in Tab. 5 und 6 sind dieselben wie unten.

Die Näherungswerte  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  der Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind auf Grund der endlichen Anzahl der Probestämme mit gewissen mittleren Fehlern behaftet. Diese mittleren Fehler interessieren uns nicht direkt, sondern nur der dadurch verursachte Fehler in der  $y$ -Bestimmung eines gewissen Durchmessers. Der mittlere Fehler in  $y$  ( $\epsilon_y$ ) kann nicht direkt aus den mittleren Fehlern in  $a$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  nach der gewöhnlichen Formel einer Summe berechnet werden, weil diese voraussetzt, dass  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  unabhängig voneinander sind. Eine andere Berechnungsmethode muss darum gewählt werden.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$s_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n p_i x_i^\mu y_i^\nu,$$

wobei also z. B.

$$s_{00} = \sum_{i=1}^n p_i = N, \quad s_{21} = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 y_i \text{ u. s. w.}$$

Wir setzen weiter

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen mit  $\Delta_{ik}$  die Unterdeterminante des Elementes in der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Kolonne von  $\Delta$  mit seinem Vorzeichen versehen. Zeilen und Kolonnen sind hier mit 0, 1, 2 u. s. w. numeriert.

Dann erhalten wir z. B.

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} s_{20} & s_{30} \\ s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = s_{20} s_{40} - s_{30}^2,$$

$$\Delta_{10} = - \begin{vmatrix} s_{10} & s_{20} \\ s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = -s_{10} s_{40} + s_{20} s_{30},$$

---


$$y = - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ s_{01} & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ s_{11} & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ s_{21} & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

Die Formel (1) für  $y$  kann geschrieben werden:

$$y = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ \sum p_i y_i & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ \sum p_i x_i y_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ \sum p_i x_i^2 y_i & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n p_i y_i \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ 1 & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ x_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ x_i^2 & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix}$$

$$y = -\frac{1}{\Delta} \sum p_i k_i y_i,$$

$$\text{där } k_i = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 \\ 1 & s_{00} & s_{10} & s_{20} \\ x_i & s_{10} & s_{20} & s_{30} \\ x_i^2 & s_{20} & s_{30} & s_{40} \end{vmatrix} = -\sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 x_i^\mu x_i^\nu \Delta_{\mu\nu}$$

Für den mittleren Fehler in  $y$  haben wir nun, weil die Koeffizienten  $k_i$  von  $y_i$  unabhängig sind:

$$\epsilon_y^2 = \frac{1}{\Delta^2} \sum p_i^2 k_i^2 \cdot \epsilon_{y_i}^2,$$

$$\epsilon_y^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta^2} \sum p_i k_i^2.$$

Nun ist

$$k_i^2 = \left( \sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 x_i^\mu x_i^\nu \Delta_{\mu\nu} \right)^2 = \sum_{\mu_1=0}^2 \sum_{\mu_2=0}^2 x_i^{\mu_1+\mu_2} \sum_{\nu_1=0}^2 \sum_{\nu_2=0}^2 x_i^{\nu_1+\nu_2} \Delta_{\mu_1 \nu_1} \Delta_{\mu_2 \nu_2}$$

Hieraus

$$\sum_i p_i k_i^2 = \sum_{\mu_1=0}^2 \sum_{\mu_2=0}^2 x^{\mu_1+\mu_2} \sum_{\nu_1=0}^2 \sum_{\nu_2=0}^2 s_{\nu_1+\nu_2} \Delta_{\mu_1 \nu_1} \Delta_{\mu_2 \nu_2}.$$

Nach einigen Rechnungen und mit Hilfe bekannter Sätze über Entwicklung von Determinanten erhalten wir schliesslich:

$$\begin{aligned} \sum p_i k_i^2 &= \sum_{\mu=0}^2 \sum_{\mu_2=0}^2 x^{\mu_1+\mu_2} \Delta \cdot \Delta_{\mu_1 \mu_2} \\ \sum p_i k_i^2 &= \Delta [\Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01})x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02})x^2 + \\ &\quad + (\Delta_{21} + \Delta_{12})x^3 + \Delta_{22} + x^4] \end{aligned}$$

Und also:

$$\epsilon_y^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta} \left[ \Delta_{00} + (\Delta_{10} + \Delta_{01})x + (\Delta_{20} + \Delta_{11} + \Delta_{02})x^2 + \right. \\ \left. + (\Delta_{21} + \Delta_{12})x^3 + \Delta_{22} + x^4 \right] \dots \dots \dots (2)$$

Für die Dispersion ( $\sigma$ ) haben wir die Formel:

$$\sigma^2 = \frac{s_{02} - (\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})}{n - 3} \dots \dots \dots (3)$$

wo  $n$  die Anzahl Stufen von zusammen  $N$  Probestämmen (MILLS 1925);  $n = 3$ , weil es 3 Unbekannte in der Gleichung der Höhenkurve gibt.

#### Anwendung.

Nun sollen wir die Genauigkeit der Höhenkurve der verschiedenen Flächen im Verhältnis zu dem Variationstypus, den sie repräsentieren, berechnen.

Dann müssen wir erst durch numerische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate die Gleichung der Höhenkurve bestimmen. Dies ist mit Hilfe der in Tab. 5 und 6 gelieferten Rechenschemata geschehen. Hierbei sind die Bäume in 1-cm-Durchmesserstufen zusammengeführt und für Fichte nur die Stufen  $> 6$  cm mitgenommen worden. Die Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  sind in Tab. 7, S. 23 zusammengestellt. Die erhaltenen Gleichungen dürfen natürlich nicht über die Grenzen des Materials hinaus angewendet werden.

Die Formel des mittleren Fehlers in  $y$  (2) enthält die Dispersion ( $\sigma$ ). Diese kann nach der Formel 3 bestimmt werden, aber in vorliegendem Material ist die Differenz  $s_{02} - (\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21})$  sehr klein im Verhältnis zu den grossen Zahlen  $s_{02}$  und  $\alpha s_{01} + \beta s_{11} + \gamma s_{21}$ , und die zahlenmässigen Abrundungsfehler haben einen grossen Einfluss auf die Differenz. Darum ist die Dispersion nach der Formel:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v^2}{N-3}}$$

berechnet werden.  $v$  ist die Differenz zwischen der beobachteten Höhe und dem Mittelwert  $\alpha + \beta x + \gamma x^2$  und  $N$  die Anzahl der Stämme. Die Gleichung  $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$  ist graphisch in einem grossen Masstabe aufgelegt worden, um die Differenzen zu erhalten, und dann ist die Dispersion jedes Baumes abgelesen worden.

Die Dispersionen der verschiedenen Flächen gehen aus Tab. 8, S. 24 hervor und sind sowohl in m als in % der mittleren Höhe ausgedrückt worden. Unter mittlerer Höhe wird hier und im folgenden die in der Höhenkurve abgelesene Höhe des mittleren Durchmessers (des Grundflächenmittelstammes) verstanden. Die geringen Werte der Flächen 253 und 349<sup>1</sup> dürften sich dadurch erklären, dass sie durch Kultur entstanden sind. In diese Dispersionen gehen auch die zufälligen Messungsfehler ein.

Der Zusammenhang zwischen der prozentuellen Dispersion und der mittleren Höhe bei gewisser Behandlungsform ist näher untersucht worden. Die Dispersion von der graphischen Höhenkurve ist für 10 andere stark niederdurchforstete Versuchsflächen von Kiefer ausgerechnet und nebst den Kieferflächen des Materials mit derselben Behandlungsform graphisch aufgelegt worden (Fig. 6, S. 26). Die Anzahl der Probestämme der ersten Flächen variiert zwischen 50—75. Aus Fig. 6 geht hervor, dass die prozentuelle Dispersion mit steigender mittlerer Höhe bis etwa 15 m sinkt, um danach konstant zu bleiben (5—6 %).

Nach der Formel 2 ist der mittlere Fehler der Höhe ( $\epsilon_y$ ) des mittleren Durchmessers der verschiedenen Flächen bestimmt und sowohl in m als in % der mittleren Höhe ausgedrückt worden (Tab. 8, S. 24). In diese Bestimmung gehen sämtliche Bäume der Flächen (mit Ausnahme der Flächen 253 und 349<sup>1</sup>) ein und bezieht sich der mittlere Fehler auf den Variationstypus, den die Fläche repräsentiert. Die Bedeutung hiervon wird in Kap. VIII diskutiert.

Die mittleren Fehler der verschiedenen Flächen sind natürlich nicht vergleichbar, sondern nur konkrete Beispiele, die der folgenden Herleitung zugrunde liegen.

Auf dieselbe Weise kann der mittlere Fehler der Höhe jedes Durchmessers bestimmt werden, aber zuerst ist es zweckmässig, die Stammverteilung zu behandeln.

Nach der Formel 2 ist der mittlere Fehler der Höhe ( $\epsilon_y$ ) eines gewissen Durchmessers ( $x$ ) von der Dispersion, der Anzahl der Probestämme und ihrer Verteilung ( $A_{00}$ ,  $A_{10}$  — — — u. s. w.) abhängig. Die Abhängigkeit des mittleren Fehlers von der Stamverteilung wird in Fig. 7, S. 27 demonstriert.

#### KAP. IV. Die Verteilung der Stammzahl und Masse in homogenen, gleichaltrigen Beständen.

Nachfolgende Darstellung der Verteilung der Stammzahl und Masse darf nur als eine theoretische Orientierung und Zurechtlegung des Problems für praktische Anwendung betrachtet werden.

Zu diesem Zwecke sind 36 Versuchsflächen näher studiert worden. Die Flächen sind gleich auf Kiefer (Behandlungsformen: Lichtung und starke Hochdurchforstung) und Fichte (starke Niederdurchforstung und starke Hochdurchforstung) verteilt. Für jede dieser 4 Kombinationen sind also 9 Flächen behandelt worden, und unter diesen sind die Bonitätsklassen I—II, III—IV, V—VI (nach Jonson) und die Altersklassen 50—70, 71—90, 91—110 Jahre etwa gleich repräsentiert. Nur zum Vergleich sind 2 Plenterflächen in Fichte mitgenommen. Die Bearbeitung ist nach der von Hagelberg angewandten Methode geschehen, wobei Prozente Stammzahl und Masse in der Form einer Summationskurve mit dem mittleren Durchmesser (Grundflächenmitteldurchmesser) als Einheit (Rel. Durchmesser) graphisch ausgeglichen worden sind (Hagelberg 1918).

Die Streuung um die ausgeglichenen Kurven ist recht gross. Die Variationsweiten für 15 und 85 Prozente sind durch Querstriche markiert worden (Fig. 8 und 9, S. 29 und 30). Eine bestimmte Tendenz hinsichtlich des Einflusses des Alters ist nicht hervorgetreten, was sich daraus erklären dürfte, dass jüngere Alter und schwächere Hiebsformen fehlen. Die Bonität dagegen zeigt eine deutliche Tendenz, die die Resultate der früheren Untersuchungen verifiziert (Hagelberg 1918, Lönnroth 1925). Für eine gewisse Behandlungsform nimmt die Frequenz um den mittleren Durchmesser mit steigender Bonität zu und umgekehrt.

Aus Tab. 9 und 10, S. 31 geht unter anderem hervor dass der mittlere Durchmesser eine wohl fixierte Lage in der Stammverteilungsreihe, hat, die für die ziemlich extremen Behandlungsformen innerhalb sehr enger Grenzen variieren. Eine gute Bestätigung für die alte Regel von Weise. Innerhalb der Masse ist jedoch die Lage mehr veränderlich. Die Hochdurchforstung zeigt ganz natürlich eine ausgeprägte Schiefeit in der Stammverteilung.

#### KAP. V. Die Anzahl der Probestämme, die erforderlich ist, um eine gewisse Sicherheit in der mittleren Höhe zu erreichen.

Wir gehen von folgendem schematischen Beispiel aus. Es wird vorausgesetzt, dass die  $N$  Probestämme auf  $n = 2\nu + 1$  Stufen mit der gemein-



samen Weite  $h$  (auf der  $x$ -Achse) verteilt sind. Der Ursprung wird in die mittlere Stufe gelegt, und es wird angenommen, dass die Probestämme mit derselben Anzahl auf jede von den  $n$ -Stufen verteilt sind (äquidistante Verteilung), und dass die Höhenkurve von der Form  $y = a + bc + cx^2$  ist. Nach einigen Rechnungen mit Hilfe der Formel 2 erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\epsilon_y^2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu^2+\nu-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}(\nu^2+\nu+3)\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{h}\right)^4}{\nu(\nu+1)(\nu^2+\nu-\frac{3}{4})} \cdot \frac{9\sigma^2}{4N} \quad (5)$$

$$x = 0 \quad \epsilon_y^2 = \frac{\nu^2 + \nu - \frac{1}{3}}{\nu^2 + \nu - \frac{3}{4}} \cdot \frac{9\sigma^2}{4},$$

oder, wenn  $\nu$  nicht zu klein ist approximativ

$$= \frac{9\sigma^2}{4N} \text{ und } \epsilon_y = \frac{1,5\sigma}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

Die Formel 6 gibt offenbar den mittleren Fehler der Höhe des durchschnittlichen Durchmessers.

Das Polynom in  $x$ , das in Formel 5 auftritt, hat für  $x = 0$  einen Maximalpunkt. In der nächsten Umgebung von  $x = 0$  ist also der mittlere Fehler kleiner als der eben angegebene Werte für  $x = 0$ .

Für nicht zu kleine Werte von  $\nu$  kann  $\epsilon_y^2$  approximativ geschrieben werden:

$$\epsilon_y^2 = \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{\nu h} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{\nu h} \right)^4 \right] \cdot \frac{9\sigma^2}{4N},$$

wenn man in jedem Glied nur die höchste Potenz von  $\nu$  behält.

Hieraus:

$$\epsilon_y = K_x \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (7)$$

$$\text{wo } K_x = 1,5 \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{\nu h} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{\nu h} \right)^4}.$$

Man erhält:

$\frac{x}{0}$	$\frac{K_x}{1,5}$
$\pm 0,25 \nu h$	1,5
$\pm 0,50 \nu h$	1,7
$\pm 0,75 \nu h$	2,3
$\pm \nu h$	3,6

Der mittlere Fehler wächst, der nächsten Umgebung ausgenommen, symmetrisch beiderseits von dem durchschnittlichen Durchmesser. (Vergl. Fig. 10.)

Schmetisieren wir unser Beispiel weiter und setzen wir voraus, dass der

Zusammenhang zwischen Höhe und Durchmesser linear ist, so kann auf dieselbe Weise gezeigt werden, dass die Formel des mittleren Fehlers übergeht in:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (8)$$

und  $\varepsilon_y$  also von dem Durchmesser unabhängig ist. Diese Formel ist von TISCHENDORF angewandt worden (1925 und 1927), und wir kommen im folgenden noch auf sie zurück.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Sicherheit in den verschiedenen Teilen der Höhenkurve bei nicht äquidistanter Verteilung der Probestämme zu studieren. Dies ist in den Flächen Sf 50<sup>II</sup> und Sf 50<sup>IV</sup> (Fig. 10, S. 34) geschehen, wobei die Dispersion ( $\sigma$ ) der beiden Flächen gleich 1 und die Anzahl der Probestämme gleich 60 gesetzt worden ist. Die Probestämme sind als jeder  $n$ :te Baum entnommen werden. Ausserdem ist der mittlere Fehler der Fläche Sf 50<sup>II</sup> bei äquidistanter Verteilung der 60 Probestämme nach Formel 5 berechnet worden.

Bei Hochdurchforstung ist die Höhenkurve genauer bestimmt für die schwächeren Durchmesser als bei Niederdurchforstung, aber für die stärkeren Stufen ist das Verhältnis umgekehrt. Dies gilt bei der hier angewandten Methode für die Auswahl der Probestämme und beruht natürlich auf den verschiedenen Stammverteilungstypen der beiden Durchforstungsformen.

Kehren wir zu der Formel 8 zurück,

$$\varepsilon_y = K_x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

so ist es klar, dass diese generalisiert werden kann, bei variabler Anzahl der Probestämme ( $N$ ), aber konstanter Verteilung derselben (Variationsweite und Frequenz der Stufen) zu gelten, obgleich natürlich mit anderen  $K$ -Werten als denen, die aus der äquidistanten Verteilung hergeleitet worden sind. Da die Dispersion konstant ist, erhalten wir also die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon_{y_i}}{\varepsilon_{y_j}} = \sqrt{\frac{N_j}{N_i}} \dots \dots \dots (9)$$

Unter Voraussetzung konstanter Verteilung können wir nun nach Formel 9 aus einem gegebenen Material die Anzahl der Probestämme die erforderlich ist, um einen fixierten mittleren Fehler zu erreichen, berechnen.

Bei objektiver Auswahl der Probestämme in homogenen Versuchsflächen und Beständen was am einfachsten dadurch geschieht, dass man jeden  $n$ :ten Baum in der Stammnummerliste als Probestamm nimmt, sind die Voraussetzungen einer approximativ konstanten Verteilung gross, wenn die Anzahl nicht zu klein ist. Besonders muss dies der Fall in der nächsten Umgebung eines Durchmessers mit einer mehr stabilen Lage in der Frequenzreihe sein. In dieser Hinsicht genügt der mittlere Durchmesser grossen Ansprüchen.

Die Herleitung der Formel 9 wird in Tab. 11, S. 37 empirisch verifiziert. Die Formel 2 kann geschrieben werden:

$$\varepsilon_y = \sigma R_x,$$

wo  $R_x$  nur von der Anzahl und Verteilung der Probestämme abhängig ist. Die Differenz zwischen wahren und berechneten  $R$ -Werten ist ein Kriterium

für die Übereinstimmung zwischen wahrer und theoretischer Verteilung der Probestämme. Die theoretischen Werte für 60 und 20 Probestämme sind mit Hilfe der Formel 9 aus den Werten der sämtlichen erhalten worden. Die Werte des mittleren Fehlers in Klammern sind unter Anwendung der Dispersion der sämtlichen berechnet worden und zeigen, dass der Einfluss der Differenz zwischen wahrer und theoretischer Verteilung auf den mittleren Fehler hier sehr gering ist.

Die Differenzen der Dispersion sind auch gering und liegen innerhalb der Grenzen der genauest bestimmten Dispersion (die der sämtlichen). Der theoretisch berechnete mittlere Fehler zeigt also gute Übereinstimmung mit dem aus den Probestämmen deduzierten Wert.

Der theoretisch berechnete mittlere Fehler in der Höhe des mittleren Durchmessers bezieht sich offenbar auf den mittleren Durchmesser der Probestämme, aber was uns hier interessiert, das ist der mittlere Fehler der mittleren Höhe der Fläche. Dieser Unterschied dürfte jedoch vernachlässigt werden können, wenn die Anzahl der Probestämme nicht zu gering ist (vergl. Tab. 11:II). Wir gehen im folgenden davon aus, dass die Voraussetzungen der Formel 9 approximativ erfüllt sind.

Setzen wir die mittlere Höhe der Probestämme gleich der der Versuchsfläche, so kann offenbar die Anzahl der Probestämme, die für einen gewissen prozentuellen mittleren Fehler in der mittleren Höhe erforderlich ist, berechnet werden. Mit Hilfe des mittleren Fehlers nachdem sämtliche Bäume höhengemessen waren, ist dies in Tab. 12, S. 39 geschehen. Diese mittleren Fehler beziehen sich auf den Variationstypus (vergl. Kap. VI und VIII) und die hier angewandte Methode bei der Auswahl der Probestämme (jeden  $n$ :ten Baum).

Der mittlere Fehler der Höhe eines gewissen Durchmessers ( $\varepsilon_y$ ) kann nach Vorstehendem geschoben werden:

$$\varepsilon_y = K_x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

wo  $K_x$  von  $N$  unabhängig ist. Mit Hilfe von  $\varepsilon_y$ ,  $\sigma$  und  $N$  in Tab. 8 ist  $K_x$  des mittleren Durchmessers für die verschiedenen Flächen berechnet worden (Tab. 13, S. 41).  $K$  variiert für Kiefer zwischen 1,24—1,31, und für Fichte zwischen 1,28—1,39, wobei die niederen Werte sich ganz natürlich auf Niederdurchforstung beziehen. Bei äquidistanter Verteilung war  $K$  des durchschnittlichen Durchmessers gleich 1,5 und wuchs, die nächste Umgebung ausgenommen, symmetrisch beiderseits von diesem Durchmesser.

Nach einer Überlegung schreibt TISCHENDORF (1927 S. 126): »Es hängt daher die Güte irgendeiner Höhe vom Verlauf der ganzen Kurve, also von der Anzahl der erhobenen Höhen ab«, und findet, dass der mittlere Fehler einer ausgeglichenen Höhe gleich  $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  gesetzt werden kann. Dies setzt jedoch vor-

aus, dass der Zusammenhang zwischen Durchmesser und Höhe linear und die Verteilung der Probestämme äquidistant ist. Für das Material dieser Untersuchung gibt diese Berechnungsmethode einen mittleren Fehler, der um 25—40 % zu klein ist. Der Fehler in der Masse wird jedoch nicht zu gross (S. 74).

Auf Grund der Variation der  $K$ -Werte innerhalb sehr enger Grenzen dürfte

zu Überslagsberechnungen bei Auswahl der Probestämme nach hier angewandter Methode folgende approximativen und empirischen Näherungsformeln für den mittleren Fehler der mittleren Höhe aufgestellt werden können:

$$\text{Kiefer: } \varepsilon_y = \frac{1,25 \text{ à } 1,30 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (10),$$

$$\text{Fichte: } \varepsilon_y = \frac{1,30 \text{ à } 1,40 \sigma}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (11),$$

wo die niederen Konstantenwerte sich auf Niederdurchforstungstypus und die höheren Werte auf Hochdurchforstungstypus beziehen. Infolge des geringen Umfangs des Materials sind diese Formeln nur von provisorischem Charakter.

Mit Hilfe der Formeln 9, 10 und 11 sind die in Tab. 14 angegebenen mittleren Fehler in der mittleren Höhe für Bestände aus Siljansfors ausgerechnet worden. Die Dispersion bezieht sich auf die graphisch ausgeglichene Höhenkurve, und der Konstantenwert ist durch Vergleichung zwischen der Verteilung der Probestämme und den Verteilungsreihen in Tab. 9 und 10 gewählt worden.

#### KAP. VI. Die Genauigkeit der Kubikmasse mit Bezug auf die Unsicherheit der Höhenkurve.

##### *Der mittlere Fehler mit Bezug auf den repräsentierten Variationstypus.*

Berechnen wir die Masse eines Bestandes mit Hilfe der in der Höhenkurve abgelesenen mittleren Höhe, so wird der prozentuelle mittlere Fehler in der Masse mit Bezug auf die Unsicherheit der Höhenkurve gleich der der mittleren Höhe. Machen wir viele Ablesungen in der Höhenkurve und setzen die Masse des Bestandes gleich die Summe derjenigen der Durchmesserstufen, so wird der Fehler in der Masse kleiner infolge Fehlerausgleichung zwischen den mittleren Fehlern der Stufen.

Die Aufgabe ist die, den mittleren Fehler der Masse bei der hier gewählten Stufeneinteilung und mit Bezug auf den repräsentierten Variationstypus zu schätzen.

Es sei  $p_j$  die Stammzahl und  $f_j$  das Produkt von der Formzahl und  $\frac{\pi}{4}$  in der  $j$ -ten Durchmesserstufe. Die Masse ist dann:  $\sum p_j f_j x_j^2 y_j$ .

Aber  $y_j$  ist unbekannt. Wir ersetzen  $y_j$  durch seinen Näherungswert  $a + \beta x_j + \gamma x_j^2$ , wo  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  durch numerische Ausgleichung der Höhen der Probestämme erhalten worden sind, und suchen den mittleren Fehler ( $\varepsilon_V$ ) des Näherungswert der Masse:

$$V = \sum p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2).$$

Der mittlere Fehler kann auf dieselbe Weise wie für  $y$  berechnet werden.  $V$  wird nämlich erhalten, wenn man in Formel 1 (S. 66) 1,  $x$  und  $x^2$  in der ersten Zeile der Determinante durch bzw.  $\sum p_j f_j x_j^2$ ,  $\sum p_j f_j x_j^3$  und  $\sum p_j f_j x_j^4$  ersetzt. Man findet folgende Schlussformel:

$$\varepsilon_V^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta} (\Delta_{00} t_0^2 + \Delta_{11} t_1^2 + \Delta_{22} t_2^2 + 2 \Delta_{01} t_0 t_1 + 2 \Delta_{02} t_0 t_2 + 2 \Delta_{12} t_1 t_2), \quad (12)$$

wo  $t_0 = \sum p_j f_j x_j^2$ ,  $t_1 = \sum p_j f_j x_j^3$ ,  $t_2 = \sum p_j f_j x_j^4$ .

Die Determinante ( $\Delta$ ) und die Unterdeterminanten ( $\Delta_{00}$ ,  $\Delta_{11}$  . . .) sind identisch mit entsprechenden Grössen bei der numerischen Ausgleichung der Höhen der Probestämme (Tab. 6).

Nach der Formel 12 ist der mittlere Fehler der Masse für die verschiedenen Versuchsflächen ausgerechnet worden (Tab. 15, S. 46). Dieser mittlere Fehler ist ganz natürlich kleiner als der der mittleren Höhe. Mit Hilfe von Formel 9 ist auch die Anzahl der Probestämme, die für einen gewissen, prozentuellen, mittleren Fehler in der Masse erforderlich ist, berechnet worden (Tab. 15).

A priori kann vorausgesetzt werden, dass es einen festen Zusammenhang zwischen dem prozentuellen mittleren Fehler der mittleren Höhe und dem der Masse gibt (vergl. Fig. 11, S. 47). Die Regressionslinie, die offenbar durch den Ursprung gehen muss, ist

$$\varepsilon_V = 0,85 \varepsilon_y \quad \dots \quad (13)$$

Die Näherungsformeln 10 und 11 gehen mit Bezug auf den prozentuellen mittleren Fehler der Masse abgerundet über in:

$$\text{Kiefer: } \varepsilon_V = \frac{1,05 \text{ bis } 1,10 \sigma}{\sqrt{N}} \quad \dots \quad (14)$$

$$\text{Fichte: } \varepsilon_V = \frac{1,10 \text{ bis } 1,20 \sigma}{\sqrt{N}} \quad \dots \quad (15)$$

Wo  $\sigma$  die Dispersion in Prozenten der mittleren Höhe ist.

Die von TISCHENDORF gebrauchte Formel (S. 71) gibt also für dieses Material bei der angewandten Methode für die Auswahl der Probestämme einen mittleren Fehler, der um 5—20 % zu klein ist.

Die in Tab. 16 angegebenen mittleren Fehler sind mit Hilfe der Formel 13 berechnet worden. Der approximative Charakter der Näherungsformeln ist früher betont worden.

*Der mittlere Fehler mit Bezug auf die abgeschätzte Fläche.*

Wir setzen voraus, dass die Stammzahl einer Versuchsfläche  $\sum p_j + \sum p_i$  ist, wo  $\sum p_i$  die objektiv entnommenen und höhengemessenen Probestämme sind. Die Stämme sind wie im vorhergehenden in 1-cm-Stufen zusammengeführt ( $j$  bzw  $i$ ). Durch numerische Ausgleichung der Höhen ( $y_i$ ) der Probestämme erhalten wir nach dem Vorstehenden die Höhenkurve:

$$y = a + \beta x + \gamma x^2.$$

Bei der Berechnung der Masse der Versuchsfläche nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die Probestämme separat mit Leitung der gemessenen Höhen kubiert werden und also keinen Fehler in der Masse wegen fehlender repräsentativer Eigenschaften verursachen. Die übrigen Bäume ( $\sum p_j$ ), deren Höhen ( $y_j$ ) unbekannt sind, werden mit Hilfe der Höhenkurve kubiert, und ihre Masse ist bei Anwendung derselben Bezeichnungen wie im vorhergehenden:

$$W = \sum_j p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2).$$

Die Aufgabe ist die den mittleren Fehler ( $\varepsilon_W$ ) dieses Näherungswertes mit Bezug auf die einzelnen Bäume zu schätzen.

Wir setzen zunächst voraus, dass die exakten Werte von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\sigma$  bekannt sind. Ersetzen wir dann die unbekannte Höhe  $y_j$  durch ihren Mittelwert  $a + bx + cx^2$ , so erhalten wir einen Näherungsausdruck, dessen mittlerer Fehler ist:

$$\sigma \sqrt{\sum p_j (f_j x_j^2)^2}.$$

Wir verfügen jedoch nur über den Näherungswert:  $W = \sum p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2)$ .

Zu dem Quadrat des im vorhergehenden angegebenen mittleren Fehlers müssen wir dann einen Ausdruck addieren, der sich auf die Unsicherheit in  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bezieht. Dieser Ausdruck ist offenbar das Quadrat des mittleren Fehlers mit Bezug auf den Variationstypus ( $\epsilon_v$ ), Formel 12, S. —.)

Wir erhalten also folgende Schlussformel:  $\epsilon_w^2 = \sigma^2 (Q^2 + T^2) \dots (16)$

$$Q^2 = \sum p_j (f_j x_j^2)^2$$

$$T^2 = \frac{1}{A} (\Delta_{00} t_0^2 + \Delta_{11} t_1^2 + \Delta_{22} t_2^2 + 2 \Delta_{01} t_0 t_1 + 2 \Delta_{02} t_0 t_2 + 2 \Delta_{12} t_1 t_2)$$

Gehen wir zu dem prozentuellen mittleren Fehler über, so erhalten wir:

$$\epsilon_w'^2 = \epsilon_q'^2 + \epsilon_v'^2, \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{wo } \epsilon_q'^2 = \frac{(100 \sigma)^2 \cdot \sum p_j (f_j x_j^2)^2}{[\sum p_j f_j x_j^2 (a + \beta x_j + \gamma x_j^2)]^2} \text{ und}$$

$\epsilon_v'$  der prozentuelle mittlere Fehler mit Bezug auf den Variationstypus nach dem Vorstehenden ist.

Aus dem Ausdruck für  $\epsilon_q'^2$  geht hervor, dass dieser auf Null zu geht, wenn  $j$  auf  $\infty$  zu geht (vergl. auch Tab. 18, S. 52). Die Zahlen  $f_j x_j^2$  sind klein, weshalb  $\epsilon_q'^2$  bei grösseren  $j$ -Werten vernachlässigt werden kann; also ist der mittlere Fehler  $\epsilon_w'$  approximativ gleich dem mittleren Fehler mit Bezug auf den Variationstypus ( $\epsilon_v'$ ).

Bei der theoretischen Herleitung wurde angenommen, dass die Probestämme ( $x_i$ ) separat mit Hilfe der nicht ausgeglichenen Höhenmessungen kubiert wurden. Aber in der Tat werden auch diese in der Regel nach ihren ausgeglichenen Werten kubiert — der Höhenkurve. Die Differenz der Masse zwischen der Höhenkurve unbedeutend, und wird im folgenden vernachlässigt (vergl. Tab. 17. In Tab. 17, S. 51 sind dieselben Formzahlen und Durchmesserstufen bei den beiden vergleichenden Kubierungen verwendet worden.

Nach der Formel 17 ist der mittlere Fehler ( $\epsilon_w'$ ) teils mit 20, teils mit 60 Probestämmen für die Höhenkurve berechnet worden (Tab. 18, S. 52). Der mittlere Fehler ist ausserdem in Prozents der Masse der ganzen Fläche ( $W_{j+i}$ ) berechnet worden.

Aus Tab. 18 geht hervor, dass für Abschätzungen in der Praxis der mittlere Fehler mit Bezug auf den Variationstypus ( $\epsilon_v'$ ) gewöhnlich mit guter Approximation gleich dem mittleren Fehler des Abschätzungsobjekts ( $\epsilon_w'$ ) gesetzt werden kann. Für Versuchsflächen mit geringer Stammzahl und grosser Anzahl Probestämme kann offenbar nicht diese Approximation gemacht werden, sondern muss der mittlere Fehler ( $\epsilon_w'$ ) nach der oben angewandten Methode bestimmt werden.

## KAP. VII. Die Auswahl der Probestämme.

In dieser Untersuchung sind die Probestämme nach derselben, konstanten Quote in jeder Durchmesserstufe entnommen, was als eine einfache und in der Regel praktisch brauchbare, objektive Methode betrachtet werden muss. Hiermit soll nicht gesagt sein, dass diese Methode die effektivste ist. Vielmehr können gewisse Mängel in dieser Hinsicht erwartet werden. Es dürfte in dessen vorausgesetzt werden können, dass eine theoretisch richtige Verteilung bei der praktischen Anwendung, da das Abschätzungsobjekt im voraus nicht bekannt ist, nur den Charakter eines Schrittes in rechter Richtung erhalten kann und also in hohem Grade von der Fähigkeit des Taxators abhängt. Unter solchen Umständen ist es als ratsam erachtet worden, die Fehlerberechnungen auf die obige Methode zu gründen, wodurch eine Unterschätzung des mittleren Fehlers nicht riskiert wird.

Die Verteilung der Probestämme ist aus theoretischem Gesichtspunkt eine interessante mathematische Aufgabe. Bei der praktischen Anwendung sind jedoch die Möglichkeiten sehr begrenzt, weshalb die Verteilung der Probestämme hier nur mehr schematisch und diskussionsweise behandelt wird.

Wir gehen zunächst von folgenden schematischem Beispiel aus. Die Masse eines Bestandes ist mit im vorhegenden gebrauchten Bezeichnungen:

$$W = p_1 f_1 x_1^2 y_1 + p_2 f_2 x_2^2 y_2 - - - - p_j f_j x_j^2 y_j$$

Für jede Durchmesserstufe *für sich* und von den übrigen unabhängig werden die Höhen der Probestämme mittelst einer geraden Linie ausgeglichen und wird die Höhe des mittleren Durchmessers ( $y_j$ ) abgelesen. Ihr mittlerer Fehler

ist dann  $\varepsilon_{y_j} = \frac{\sigma_j}{\sqrt{n_j}}$  und der mittlere Fehler der Masse:

$$\varepsilon_W^2 = (p_1 f_1 x_1^2) \frac{^2 \sigma^2}{n_1} + (p_2 f_2 x_2^2) \frac{^2 \sigma^2}{n_2} - - - - (p_j f_j x_j^2) \frac{^2 \sigma_j^2}{n_j}$$

Die Probestämme ( $n_1, n_2, n_3 - - -$ ) müssen offenbar so verteilt werden, dass  $\varepsilon_W^2$  ein Minimum wird.  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - - -$  approximativ nach dem Vorhergehenden. Nach einigen Rechnungen in Analogie mit TISCHENDORF (1927) erhalten wir dann:

$$n_1 : n_2 : n_3 \dots = p_1 f_1 x_1^2 : p_2 f_2 x_2^2 : p_3 f_3 x_3^2 \dots$$

D. h. die Anzahlen der Probestämme in den Stufen verhalten sich wie das Produkt aus Formzahl und Grundfläche. Wenn aber die Höhen der Probestämme wie gewöhnlich mit einer gemeinsamen Kurve nach hier angewandter Methode ausgeglichen werden, so werden die mittleren Stufen relativ sicherer bestimmt als die Flügel (vergl. Fig. 10 und S. 34). Bei der graphischen Ausgleichung haben wir für die niederen Durchmesserstufen einen grossen Anhalt in dem Schnittpunkt auf der  $y$ -Achse (die Brusthöhe 1,3 m), weshalb es zu nächst gilt, die Probestämme so zu verteilen, dass die stärkeren Stufen ein

wenig mehr repräsentiert werden als in Verhältnis zu  $pfx^2$ . Aus praktischen Gründen muss der Einteilungsgrund einheitlich sein und müssen sich Faktoren anschliessen, von deren Verteilung wir uns eine Vorstellung bilden können, z. B. Stammzahl, Grundfläche und Masse. Darum gehen wir davon aus, dass bei effektiver Verteilung der Probestämme ihre Anzahl sich wie die Massen verhalten soll, d. h.

$$n_1 : n_2 : n_3 \dots = p_1 f_1 x_1^2 y_1 : p_2 f_2 x_2^2 y_2 : p_3 f_3 x_3^2 y_3$$

Um die Probestämme nach diesem Grundsatz verteilen zu können, muss die Probestammquote variabel sein, und es wird der Grad hiervon von dem Zweck und der Methodik der Abschätzung abhängen. Bei der Auswahl der Probestammquote können Erfahrungszahlen betreffs der Verteilung der Stammzahl und Masse in Beständen von verschiedenen Typus Anhalt gewähren (vergl. S. 31).

Für zwei Versuchsflächen sind 60 Probestämme auf drei verschiedene Weisen entnommen worden: 1:o) 60 nach gewisser konstanter Quote; 2:o) 50 nach gewisser Quote und dazu die 10. stärksten; 3:o) 60 nach drei verschiedenen Quoten, so dass 15 Stämme 25 % der Masse von der schwächsten Dimension repräsentieren, 30 für das Intervall 25—75 % und 15 für das Intervall 75—100 %. Das Resultat geht aus Tab. 20, S. 56 hervor, und ausserdem wird für die Fläche Sf 50<sup>IV</sup> die Genauigkeit der Höhenkurve bei den verschiedenen Methoden durch Fig. 7 S. 27 demonstriert.

Die Differenzen erscheinen vielleicht unbedeutend, sie müssen aber gegen die Stammzahl, die zu ihrem Erreichen erforderlich ist, gesehen werden. Um den mittleren Fehler von 1,25 auf 1,08 % zu senken, muss die Stammzahl bei derselben Methode für die Auswahl von 60 auf 80 vermehrt werden. Eine richtige Verteilung der Probestämme ist also kein bedeutungsloses Moment, wenn es mit geringstmöglichen Mitteln die erforderliche Genauigkeit zu erreichen gilt.

## KAP VIII. Über repräsentative Probestämme.

Bei Abschätzung für praktische Zwecke ist es klar, dass diese sich auf den aktuellen Bestand beziehen muss, aber für das Versuchswesen liegt die Sache nicht so einfach.

Ungesucht erhebt sich die Frage, ob das Resultat der Abschätzung sich auf die einzelne Fläche oder den Variationstypus beziehen soll. Denken wir uns eine Eigenschaft, welche es auch sei, bei den Baumindividuen eines Bestandes, so wird sie durch einen Mittelwert und eine Variation um diesen Mittelwert (Dispersion  $\sigma$ ), charakterisiert, welche durch die biologischen Eigenschaften der Bäume, die Standortverhältnisse, und die Behandlungsform bestimmt werden. Soll nun der Einfluss z. B. einer gewissen Behandlungsform unter im übrigen identischen Verhältnissen durch vergleichende Versuche studiert werden, so ist es klar, dass wir das Resultat der Abschätzung auf den Variationstypus beziehen müssen, um mit Sicherheit zu wissen, ob der Effekt einer bestimmten Ursache (Behandlungsform)



beigelegt werden kann und nicht nur eine Äusserung der Variation ist. Dasselbe gilt natürlich auch für Versuchsflächen bei Produktionsuntersuchungen für Ertragstafeln.

Dies bedeutet natürlich keine Veränderung der Abschätzung, sondern nur, dass diese mittelst einer Sicherheidsbestimmung, die sich auf den Variations-typus bezieht, angegeben wird.

---